AGB
P. 17

P 17

BIBLIOTHEK
BAMBERG

P/17

Lehrbuch
der
ebenen Geometrie
nebst
Berechnung der wichtigsten geometrischen Körper und ihrer Oberflächen.

P 17
K. B. GYMNAS: BIBLIOTHEK BAMBERG

Im Auftrage
des
polytechnischen Vereins zu Würzburg
für
die unter dessen Leitung stehende
Sonn- und Feiertags-Gewerbsschule
bearbeitet
von

Valent. Mayring,
königl. Lehrer an der Kreis-Landwirthschafts- und Gewerbsschule und Lehrer der Geometrie an der Sonn- und Feiertags-Gewerbsschule zu Würzburg.

Mit sechs lithographirten Tafeln.

Würzburg.
Druck von Carl Anton Zürn.
1842.

Staatliche
Bibliothek
Bamberg

Vorwort.

Unter den an der Sonn- und Feiertags-Gewerbsschule dahier vorgeschriebenen Lehrgegenständen ist auch der Geometrie eine Stelle angewiesen. Da aber das für diesen Unterrichtszweig früher bestimmte Lehrbuch des Professors Dr. Schön durch die alljährlich sich erneuernde, nicht unbedeutende Schülerzahl bereits vergriffen ist: so hat der wohllöbliche polytechnische Verein, unter dessen Leitung die genannte Anstalt seit einer langen Reihe von Jahren sich eines kräftigen Gedeihens erfreut, mir den Auftrag ertheilt, ein neues zweckmäßiges Lehrbuch der Geometrie zu entwerfen.

Wenn auch die hiermit verbundene Schwierigkeit nicht mißkennend, durfte ich dennoch mich einem so ehrenden Auftrage nicht entziehen, einerseits weil den Schülern die Erlernung der Geometrie durch ein in ihren Händen befindliches Lehrbuch erleichtert werden konnte, andererseits weil die reiche Auswahl vortreff-

licher Werke über diese Wissenschaft jede mögliche Unterstützung darbot.

Bei der Bearbeitung dieses Werkchens wurden vor Allem die Lernkräfte und die dem Unterrichte zugemessene Zeit berücksichtigt. Es besuchen nämlich den Geometrie-Unterricht Lehrlinge aus dem Gewerbsstande mit den aus der deutschen Schule gesammelten Vorkenntnissen. Für diese soll die Geometrie innerhalb eines Schuljahres in höchstens zwei Vormittagsstunden der Sonn- und Feiertage abgehandelt werden, so daß dem vollständigen Unterrichte nur ungefähr 50 Lektionen gewidmet werden können.

Um solchen Schülern bei der mäßigen Stundenzahl den Unterricht so fruchtbar als möglich zu machen, wird derselbe mehr praktisch, als theoretisch sein, und sich hauptsächlich auf die Lösung jener Aufgaben, welche im Gewerbsleben vorzugsweise Anwendung finden, beziehen müssen. Da aber einer bloßen Anleitung zur Auflösung geometrischer Aufgaben ohne Theorie jede Grundlage mangelt, und eine solche Anleitung, kaum gelernt, wieder vergessen wird: so war es nothwendig, jene Lehrsätze, aus welchen die Lösung der Aufgaben abgeleitet wird, gehörig zu berücksichtigen und in strenger Auseinanderfolge zu behandeln.

Aus der Stereometrie konnte nur die Erklärung und Berechnung der wichtigsten Körper aufgenommen werden, theils weil zu einer vollständigeren Entwicklung die Unterrichtszeit nicht ausreichen würde, theils

weil dieser Theil der Stereometrie für die einstige Bestimmung der Schüler schon genügen dürfte.

Dieses sind in kurzem die Ansichten, welche mich bei Abfassung dieses Werkchens leiteten.

Möge dasselbe der Jugend aus dem Gewerbsstande den beabsichtigten Nutzen gewähren! Diesem einzigen Ziele habe ich nachgestrebt, und die Erreichung desselben wird mir der erfreulichste Lohn sein.

Würzburg, im Februar 1842.

Der Verfasser.

Erklärung und Aussprache der Zeichen.

+ plus, mehr, das Zeichen der Addition.
— minus, weniger, das Zeichen der Subtraktion.
. multiplizirt mit, mal, das Zeichen der Multiplikation.

Das Zeichen der Division ist ein horizontaler Strich, über welchem der Dividend, und unter welchem der Divisor steht, z. B. $\frac{AB}{CD}$ heißt AB dividirt durch CD.

: verhält sich zu, das Zeichen des geometrischen Verhältnisses.
= gleich, æquale, bei den Proportionen aber: „wie“.
√ Winkel.
> größer als.
< kleiner als.
≅ kongruent.
∾ ähnlich.
‡ parallel, parallel zu.
⊥ senkrecht, senkrecht auf.
△ Dreieck.
▭ Parallelogramm.
R ein rechter Winkel, 2R zwei rechte Winkel u. s. w.

Einleitung.

§. 1.

Erklärung. Geometrie ist die Lehre von den Raumgrößen. Der Raum hat drei Ausdehnungen (Abmessungen, Dimensionen): nach Länge, Breite und Höhe (Tiefe oder Dicke). Es giebt daher drei Hauptgattungen der Raumgrößen, nämlich: Körper, Flächen und Linien.

Ein Körper (im mathematischen Sinne) ist eine begrenzte Ausdehnung nach Länge, Breite und Höhe (Tiefe oder Dicke), oder ein nach jeder Richtung hin begrenzter Raum.

Eine Fläche ist die Grenze des Körpers und demnach eine bloße Ausdehnung nach Länge und Breite ohne Dicke.

Eine Linie ist die Grenze der Fläche und demnach eine bloße Ausdehnung nach der Länge. Die Grenze der Linie ist der Punkt, welcher gar keine Ausdehnung hat.

§. 2.

Erklärung. Die Linien werden eingetheilt in gerade, krumme, gebrochene und gemischte. Eine gerade Linie (der Kürze wegen: eine Gerade) ist der kürzeste Weg zwischen

zwei Punkten; sie entsteht, wenn ein Punkt nach einer und derselben Richtung sich fortbewegt. Man versteht daher unter der gegenseitigen Entfernung zweier Punkte die Gerade zwischen diesen Punkten. Eine krumme Linie ist diejenige, von welcher kein Theil gerade ist; sie entsteht, wenn die Richtung des Punktes während seiner Bewegung sich in jedem Augenblicke ändert. Eine geradgebrochene Linie ist eine aus mehren Geraden zusammengesetzte, und eine gemischtgebrochene Linie eine aus geraden und krummen Linien zusammengesetzte.

Anmerkung. Linien werden auf dem Papiere durch Striche mit der Reißfeder, dem Bleistifte u. s. w., auf dem Felde durch ausgesteckte Stäbe, ausgespannte Schnüre, durch Furchen zur sinnlichen Anschauung gebracht; Punkte aber werden auf dem Papiere durch Tüpfchen mit Bleistift, Kreide u. s. w., und auf dem Felde durch Pflöcke, Stangen u. s. w. bezeichnet.

§. 3.

Zusatz. Durch zwei Punkte ist die Lage einer Geraden, und wenn es ihre Endpunkte sind, auch ihre Größe bestimmt. Man bezeichnet daher eine Gerade durch zwei an ihre Endpunkte gesetzte Buchstaben. Zwischen diesen zwei Punkten giebt es nur eine einzige Gerade, krumme und gebrochene Linien aber unendlich viele (Fig. 1).

§. 4.

Zusatz. Zwei gerade Linien können nur einen Punkt mit einander gemein haben, oder schneiden sich nur in einem Punkte.

§. 5.

Zusatz. Eine Gerade hat nur eine einzige Verlängerung.

§. 6.

Erklärung. Die Neigung oder Oeffnung zweier Geraden, die in einem Punkte zusammentreffen, heißt Winkel

(Fig. 2). Die Geraden AC, BC werden Schenkel, und der gemeinschaftliche Punkt C Scheitel oder Spitze des Winkels genannt. Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Länge seiner Schenkel, sondern von der gegenseitigen Neigung derselben ab. Ein Winkel wird entweder durch die drei Buchstaben, welche am Scheitel und an den Endpunkten der Schenkel stehen, so daß man den Buchstaben am Scheitel zwischen die beiden anderen setzt, bezeichnet, z. B. ✓ACB oder ✓BCA, oder durch einen einzigen in die Oeffnung gesetzten Buchstaben, z. B. ✓m.

§. 7.

Erklärung. Haben zwei Winkel einen gemeinschaftlichen Scheitel, einen gemeinschaftlichen Schenkel, und bilden ihre beiden anderen Schenkel eine Gerade, so heißen sie Nebenwinkel (Fig. 3). Man findet zu einem Winkel den Nebenwinkel, wenn ein Schenkel des Winkels über seinen Scheitel hinaus verlängert wird.

§. 8.

Erklärung. Zwei Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und von deren Schenkeln jedesmal der eine die Verlängerung des andern ist, heißen Scheitelwinkel. Schneiden sich zwei gerade Linien, so sind jede zwei Winkel Scheitelwinkel, die nicht Nebenwinkel zu einander sind (Fig. 4). Scheitelwinkel sind: ✓m und ✓n, ferner ✓x und ✓y.

§. 9.

Erklärung. Die Flächen sind entweder eben oder krumm. Eine ebene Fläche oder eine Ebene ist jene Fläche, welche die Eigenschaft hat, daß eine nach allen möglichen Richtungen auf ihr gezogene Gerade der ganzen Länge nach in die Fläche fällt. Eine krumme Fläche ist eine solche, welche diese Eigenschaft nicht hat.

§. 10.

Erklärung. Eine nach allen Seiten begrenzte Fläche heißt eine Figur, und zwar eine ebene Figur, wenn die Fläche eben ist. Eine solche Figur heißt geradlinig, wenn sie von geraden, krummlinig, wenn sie von einer oder mehren krummen Linien begrenzt ist, gemischtlinig, wenn gerade und krumme Linien ihre Begrenzung ausmachen.

Die Begrenzungslinien einer Figur werden Seiten, und die durch dieselben gebildeten Winkel Ecke genannt.

Gerade Linien, welche in der Figur von einem Ecke zum andern so gezogen werden, daß sie nicht mit einer Seite der Figur zusammenfallen, heißen Diagonalen.

Die Begrenzungslinien einer Figur zusammengenommen heißen Umfang (Perimeter).

Aus dem Begriffe einer Figur folgt, daß, wenn eine gerad- oder krummlinige Figur einen Punkt ihres Umfanges innerhalb und einen Punkt außerhalb des Umfanges einer andern Figur hat, sich die Umfänge wenigstens in zwei Punkten schneiden müssen.

Die Figuren werden nach der Anzahl der Seiten oder Winkel: dreiseitige, vierseitige, . . . vielseitige; Dreiecke, Vierecke, . . . Vielecke (Polygone) genannt.

Sind in einer Figur alle Seiten und Winkel unter einander gleich, so heißt sie regelmäßig (regulär).

§. 11.

Grundsätze.

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.
2) Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich.
3) Ein oder einige Theile eines Ganzen sind kleiner, als das Ganze.

4) Zwei Größen, welche einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

5) Gleiches auf gleiche Weise verändert, giebt wieder Gleiches; hingegen Gleiches auf ungleiche Weise, oder Ungleiches auf gleiche Weise verändert, giebt Ungleiches.

6) Gleiche Größen lassen sich in Rücksicht ihrer Gleichheit für einander setzen.

7) Zwei Größen, welche, auf oder in einander gelegt, sich decken (in ihren Grenzen zusammenfallen), sind vollkommen gleich (kongruent); und umgekehrt, vollkommen gleiche Größen können so auf oder in einander gelegt werden, daß sie sich decken.

§. 12.

Zusatz. Zwei Körper sind daher vollkommen gleich (kongruent), wenn alle ihre Flächen; zwei Figuren sind es, wenn ihre Seiten; zwei gerade Linien sind es, wenn ihre Endpunkte zusammenfallen, und zwei Winkel sind gleich, wenn ihre Scheitelpunkte und Schenkel zusammenfallen, ohne daß gerade die Endpunkte dieser Schenkel in einander zu liegen brauchen.

Vom Kreise.

§. 13.

Erklärung. Ein Kreis ist eine Figur, welche von einer einzigen Linie so begrenzt ist, daß jeder Punkt dieser Linie von einem Punkte innerhalb, dem Mittelpunkte, gleich weit absteht.

Die Begrenzung des Kreises heißt Kreislinie, Peripherie oder Umkreis; ein Theil der Peripherie wird Bogen, die Hälfte gemeinhin auch Halbkreis, der vierte

Theil Quadrant, der sechste Sextant, der achte Oktant genannt.

Dreht man in einer Ebene eine Gerade CD (Fig. 5) so lange um den unbeweglichen Punkt C, bis sie wieder in ihre vorige Lage kömmt, so beschreibt der andere Punkt eine Kreislinie.

§. 14.

Erklärung. Jede aus dem Mittelpunkte zur Peripherie gezogene Gerade heißt Halbmesser (Radius). Jede Gerade, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heißt Sehne (Chorde); geht eine solche Gerade zugleich durch den Mittelpunkt, so heißt sie Durchmesser (Diameter).

Berührt eine Gerade die Kreislinie nur in einem Punkte, und liegt im Uebrigen ganz außerhalb derselben, so heißt sie Tangente (Berührungslinie); schneidet sie aber den Kreis, so heißt sie Sekante.

§. 15.

Zusatz. Alle Halbmesser eines und desselben Kreises, so wie alle Durchmesser, als doppelte Halbmesser, sind einander gleich.

§. 16.

Zusatz. Ein Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte kleiner, als ein Halbmesser ist, liegt innerhalb der Peripherie, ein Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte dem Halbmesser gleich ist, liegt in der Peripherie, und ein Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkte größer, als ein Halbmesser ist, liegt außerhalb der Peripherie.

§. 17.

Erklärung. Der Theil des Kreises, welcher von zwei Halbmessern und dem zugehörigen Bogen begrenzt ist, wird Ausschnitt (Sektor), z. B. ECB (Fig. 6), und der Theil des Kreises, welcher von einem Bogen und der umspannten

Sehne begrenzt ist, Abschnitt (Segment), z. B. BDNB, genannt.

§. 18.

Erklärung. Der Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt, und dessen Schenkel Halbmesser sind, heißt Mittelpunkt- oder Centriwinkel, z. B. √ECB (Fig. 6); der Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind, heißt Peripheriewinkel, z. B. √EDB.

§. 19.

Erklärung. Kreise, die aus demselben Mittelpunkte, aber mit ungleichen Halbmessern beschrieben werden, heißen koncentrisch (Fig. 7), und Kreise, die verschiedene Mittelpunkte haben, excentrisch. Kreise, deren Peripherien nur einen einzigen Punkt gemein haben, heißen berührend. Die Gerade, welche die Mittelpunkte verbindet, heißt Centrallinie.

§. 20.

Erklärung. Ein Vieleck heißt eingeschrieben in den Kreis, und dieser umschrieben um jenes, wenn alle Scheitel der Winkel des Vielecks in der Peripherie des Kreises liegen. Ein Vieleck heißt umschrieben um den Kreis, und dieser eingeschrieben in jenes, wenn alle Seiten des Vielecks Tangenten des Kreises sind.

§. 21.

Lehrsatz. Kreise mit gleichen Halbmessern oder Durchmessern sind kongruent.

Beweis. Legt man sie so auf einander, daß die Mittelpunkte zusammenfallen, so fallen ihre Grenzen in allen Punkten zusammen (nach §. 16), weil diese sämmtlich gleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind. Solche Kreise müssen daher (nach §. 11, 7) kongruent sein.

§. 22.

Lehrsatz. Der Durchmesser theilt den Kreis

in zwei gleiche (kongruente) Theile. So ist z. B. (Fig. 8) DMBD$\backsimeq$DNBD.

Beweis. Legt man DMBD so auf DNBD, daß die Endpunkte des Durchmessers DB unverrückt bleiben, so müssen alle Punkte des Bogens DMB auf alle Punkte des Bogens DNB fallen, weil sie sämmtlich vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte C gleich weit entfernt sind. Es fallen daher die Grenzen des einen Theils mit den Grenzen des andern zusammen, folglich sind diese Theile (nach §. 11, 7) kongruent.

§. 23.

Lehrsatz. Die Sehne, die durch den Mittelpunkt geht, (der Durchmesser) ist größer, als jede andere Sehne in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen. Es ist z. B. (Fig. 9) BD>EF.

Beweis. Man ziehe CE und CF, so ist

CE+CF>EF (nach §. 2), oder

CB+CD>EF, oder BD>EF.

§. 24.

Lehrsatz. Zu gleichen Mittelpunktwinkeln des nämlichen Kreises oder gleicher Kreise gehören gleiche Sehnen, gleiche Bogen, Ausschnitte und Abschnitte, und zu gleichen Bogen, gleiche Mittelpunkt-Winkel, gleiche Sehnen, gleiche Ausschnitte und Abschnitte, ferner zu gleichen Sehnen gleiche Bogen, Mittelpunkt-Winkel, Ausschnitte und Abschnitte.

1) Ist z. B. (Fig. 10.) $\surd$AOB=$\surd$COD, so ist auch

AB=CD und

Bogen AB=Bogen CD, ferner

Ausschnitt ABO$\backsimeq$Ausschnitt CDO und

Abschnitt ABMA$\backsimeq$Abschnitt CDNC.

Beweis. Man denke sich ∠COD in der Ebene des Kreises um seinen Scheitel O so lange bewegt, bis seine Schenkel CO und DO mit den Schenkeln AO und BO des gleichen ∠AOB zusammenfallen (nach §. 11, 7), so fällt C auf A und D auf B, weil OC=OA und OD=OB ist, folglich ist AB=CD (nach §. 12), weil die Endpunkte dieser Geraden zusammenfallen.

Ferner liegen die Endpunkte des Bogens CD auf den Endpunkten des Bogens AB; aber auch alle anderen Punkte des Bogens CD werden mit allen anderen Punkten des Bogens AB zusammenfallen, weil alle Punkte des einen Bogens CD eben so weit vom Mittelpunkte entfernt sind, als alle Punkte des Bogens AB.

Da nun die Grenzen des Ausschnittes CDO mit denen des Ausschnittes ABO zusammenfallen, so sind diese Ausschnitte kongruent.

Aus demselben Grunde sind die Abschnitte kongruent.

2) Ist (Fig. 10)

Bogen AB=Bogen CD, so ist auch
∠AOB=∠COD und
AB=CD, ferner
Ausschnitt AOB≅Ausschnitt COD und
Abschnitt ABMA≅Abschnitt CDNC.

Beweis. Man denke sich das Kreisstück COD so lange um O bewegt, bis Bogen CD mit dem gleichen Bogen AB zusammenfällt (nach §. 11, 7). Es liegt dann C auf A und D auf B. Da nun der Mittelpunkt O unverrückt blieb, und zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade möglich ist, so muß OC mit OA, und OD mit OB zusammenfallen. Es ist daher (nach §. 12) ∠AOB=∠COD, und deßhalb nach dem Vorhergehenden:

AB=CD, ferner

Ausschnitt AOB ≌ Ausschnitt COD und
Abschnitt ABMA ≌ Abschnitt CDNC.

3) Ist (Fig. 10)

AB = CD, so ist auch
Bogen AB = Bogen CD und
$\angle AOB = \angle COD$, ferner
Ausschnitt ABO ≌ Ausschnitt CDO und
Abschnitt ABMA ≌ Abschnitt CDNC.

Beweis. Man lege das Kreisstück CDO so auf ABO, daß C auf A, CD in die Richtung von AB und Bogen CD nach gleicher Seite mit Bogen AB falle, so fällt, weil AB = CD, der Punkt D mit B zusammen (nach §. 11, 7). Es fallen nun die Endpunkte der Bogen zusammen; aber auch alle anderen Punkte des Bogens CD werden auf alle anderen Punkte des Bogens AB fallen, weil sie sämmtlich vom gemeinschaftlichen Mittelpunkte C gleich weit entfernt sind. Es sind daher die Bogen einander gleich, und folglich nach dem Vorhergehenden:

$\angle AOB = \angle COD$,
Ausschnitt ABO ≌ Ausschnitt CDO und
Abschnitt ABMA ≌ Abschnitt CDNC.

§. 25.

Lehrsatz. Ist in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen ein Mittelpunktwinkel ein Vielfaches eines andern Mittelpunktwinkels, so ist auch der zum ersteren gehörige Bogen das eben so Vielfache des zum letzteren gehörigen Bogens.

Beweis. Es sei (Fig. 11)

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$, so ist
Bog. AB = Bog. BC = Bog. CD = Bog. DE = Bog. EF

(nach §. 24). Für $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 2\angle AOB$ ist mit-

hin der zugehörige Bogen AC=Bogen AB + Bogen BC= 2.Bogen AB. Eben so ist für ∠AOD=3∠AOB der zugehörige Bogen AD=3.Bogen AB. Auf dieselbe Weise läßt sich weiter zeigen, daß, wenn ∠AOF=5∠AOB ist, der zugehörige Bogen AF=5.Bogen AB sei, u. s. w.

So ist überhaupt ein Bogen z. B. AG das nfache eines andern Bogens z. B. AB, wenn der zum ersteren gehörige Mittelpunktwinkel das nfache des zum letztern gehörigen Mittelpunktwinkels ist.

§. 26.

Zusatz. Es verhalten sich in demselben Kreise oder in gleichen Kreisen die Mittelpunktwinkel zu einander, wie ihre Bogen, und diese, wie jene.

§. 27.

Lehrsatz. Zwei Kreise schneiden sich, wenn von den drei Linien, der Centrallinie und den beiden Halbmessern, immer zwei zusammen größer sind, als die dritte. Haben z. B. (Fig. 12) AB die Centrallinie, AD der eine Halbmesser und BC der andere eine solche Größe, daß

1) $AB+AD>BC$,

2) $AB+BC>AD$ und

3) $AD+BC>AB$ sind,

so müssen die Kreise, die man aus A mit dem Halbmesser AD und aus B mit dem Halbmesser BC beschreibt, sich schneiden.

Beweis. Da nach 1) $AB+AD>BC$ oder $BD>BC$ ist, so liegt der Punkt D außerhalb des Kreises um B, dessen Halbmesser BC ist (nach §. 16), und die Peripherie dieses Kreises wird auf der einen Seite durch C, auf der andern zwischen D und B hindurch gehen müssen.

Ferner ist nach 2) $AB+BC>AD$ oder $AC>AD$; es liegt daher der Punkt C außerhalb des Kreises um A, dessen Halb-

messer AD ist, und die Peripherie dieses Kreises wird auf der einen Seite durch D, auf der andern zwischen C und A hindurch gehen müssen.

Gesetzt nun die Peripherien dieser Kreise gingen durch den gemeinschaftlichen Punkt E, oder dieselben berührten sich auf dieser Seite in dem Punkte E, so wäre AB=AE+EB, oder die Centrallinie gleich der Summe der Halbmesser, was gegen die Annahme ist.

Ginge aber die Peripherie des Kreises um B durch F, und die Peripherie des andern Kreises um A durch E, oder lägen die beiden Kreise auf dieser Seite ganz auseinander, so wäre AB>AE+FB, oder die Centrallinie größer, als die Summe der Halbmesser, was gleichfalls gegen die Annahme ist. Da nun von zwei Punkten des einen Kreises einer innerhalb und einer außerhalb des andern Kreises liegen muß, so müssen sich diese Kreise (nach §. 10) schneiden.

Anmerkung. Wegen der Beweisführung bei dem Lehrsatze §. 30 müssen nachfolgende zwei Lehrsätze hier eingereiht werden.

§. 28.

Lehrsatz. Schneiden sich zwei Geraden AB, CD (Fig. 13), und verbindet man ihre Endpunkte durch Geraden AD, CB, so sind die sich schneidenden Linien zusammengenommen größer, als die beiden Verbindungslinien, nämlich: AB+CD>AD+CB.

Beweis. AO+OD>AD (nach §. 2),
ebenso CO+OB>CB, folglich
AO+OD+CO+OB>AD+CB.
Es ist aber AO+OB=AB und
CO+OD=CD, daher auch
AB+CD>AD+CB.

§. 29.

Lehrsatz. Zieht man aus einem Punkte innerhalb eines Dreiecks zwei Geraden an die Endpunkte einer Seite desselben, so sind die zwei einschließenden Linien, nämlich die zwei andern Seiten des Dreiecks zusammengenommen größer, als die zwei eingeschlossenen Linien. So ist (Fig. 14) $BD+DC>OB+OC$.

Beweis. Man verlängere eine der eingeschlossenen Linien, z. B. BO, bis die Verlängerung die Linie DC in F trifft, so ist (nach §. 2)

$$OF+FC>OC, \text{ und}$$
$$BD+DF>BF, \text{ daher}$$
$$OF+FC+BD+DF>OC+BF.$$

Setzt man nun statt $FC+DF$ die ganze Linie DC, und statt BF die Theile BO und OF, so erhält man:

$$OF+DC+BD>OC+BO+OF.$$

Läßt man auf beiden Seiten OF weg, so folgt (nach §. 11, 5)

$$BD+DC>OC+OB.$$

§. 30.

Lehrsatz. Zwei Kreise schneiden sich nur in zwei Punkten (Fig. 15).

Beweis. Schnitten sich zwei Kreise in mehr als zwei Punkten, so müßten nothwendig auf einer Seite der Centrallinie wenigstens zwei Schneidepunkte liegen, da in der Centrallinie selbst kein gemeinschaftlicher Punkt der beiden Kreise (nach §. 27) vorkommen kann.

Man ziehe nun an jeden dieser Schneidepunkte die Halbmesser, so bilden diese mit der Centrallinie zwei Dreiecke. Nun kann der eine Schneidepunkt innerhalb des andern Dreiecks liegen, oder auf einer Seite, oder außerhalb, so daß

2*

eine Seite des einen Dreiecks eine Seite des andern Dreiecks schneidet.

Gesetzt der Schneidepunkt D läge innerhalb des $\triangle ACB$ (Fig. 16), so wäre $AC+BC>AD+DB$ (nach §. 29), was unmöglich ist, da $AC=AD$, als Halbmesser desselben Kreises, und eben so $BC=BD$, also

$$AC+BC=AD+BD.$$

Gesetzt aber der Schneidepunkt D läge auf AC (Fig. 17), so wäre der Halbmesser AD kleiner, als der Halbmesser AC desselben Kreises, was wieder unmöglich ist.

Gesetzt endlich der Schneidepunkt D läge außerhalb des $\triangle ACB$, so daß BD eine Seite AC durchschnitte (Fig. 18), so wäre (nach §. 28) $AC+BD>AD+BC$, was gleichfalls unmöglich ist, da $AC=AD$, als Halbmesser desselben Kreises, und eben so $BD=BC$, folglich

$$AC+BD=AD+BC.$$

§. 31.

Erklärung. Den Umkreis eines jeden Kreises theilt man in 360 gleiche Theile, die man Grade nennt, jeden Grad wiederum in 60 gleiche Theile, Minuten genannt, und jede Minute in 60 Sekunden u. s. w. Die Grade, Minuten, Sekunden werden mit folgenden rechts oberhalb der Zahlen bemerkten Zeichen angegeben: (°), (′), (″); es wird daher die Angabe: Bog. 45° 58′ 36″ gelesen: Bogen von 45 Graden, 58 Minuten und 36 Sekunden. Da aber ein großer Umkreis eben so, wie ein kleiner in gleichviel Grade abgetheilt wird, so kann die Anzahl der Grade eines Bogens nicht dessen wirkliche Länge angeben, sondern nur dessen Verhältniß zur ganzen Peripherie; d. h. der wie vielste Theil die angegebene Anzahl Grade von der ganzen Anzahl 360 ist, der eben so vielste Theil ist der Bogen von der ganzen Peripherie.

§. 32.

Erklärung. Zieht man aus dem Scheitel eines Winkels zwischen seinen Schenkeln einen Kreisbogen, so wird dieser Bogen mit der Vergrößerung oder Verkleinerung des Winkels (nach §. 26) verhältnißmäßig größer oder kleiner. Es kann daher das Verhältniß der Winkel durch das Verhältniß der zugehörigen Bogen bestimmt werden. Man bezieht deßhalb die Anzahl der Grade des aus dem Scheitel eines Winkels zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Bogens auf den Winkel selbst, und drückt den Winkel durch den Bogen aus. Das Maß des Bogens gilt dann für den Winkel; man nimmt deßhalb gemeinhin den Bogen als Maß des Winkels.

Von den Winkeln.

§. 33.

Erklärung. Die Winkel werden in rechte, spitze und stumpfe abgetheilt. Ein rechter Winkel (oder der Kürze wegen: ein Rechter) ist ein solcher, welcher den vierten Theil des ganzen Umkreises, nämlich 90° zwischen seinen Schenkeln enthält; ein spitzer Winkel ist derjenige, der kleiner ist, als ein Rechter, und ein stumpfer, der größer ist, als ein Rechter.

Der Halbkreis ist die Bestimmung zweier Rechten, und der ganze Umkreis bestimmt vier Rechte.

§. 34.

Zusatz. Alle rechten Winkel sind einander gleich, weil sie als Mittelpunkwinkel gleicher Kreise mit gleichen Bogen zu betrachten sind.

§. 35.

Erklärung. Man unterscheidet noch gerade, hohle und erhabene Winkel. Ein gerader Winkel ist derjenige, dessen Schenkel eine gerade Linie bilden. Er enthält zwischen seinen Schenkeln den halben Umkreis oder 180° und ist daher zweien Rechten gleich. Ein hohler Winkel ist derjenige, welcher weniger, als 180° zwischen seinen Schenkeln enthält, also kleiner ist als 2R, und ein erhabener, welcher größer ist, als 2R.

§. 36.

Erklärung. Winkel, welche sich zu zwei Rechten ergänzen, heißen Supplementwinkel, und Winkel, welche sich zu einem Rechten ergänzen, Complementwinkel.

§. 37.

Lehrsatz. Nebenwinkel enthalten zusammengenommen 180°, oder betragen 2R. So ist z. B. (Fig. 19)

$\angle ACD + \angle BCD = 2R$.

Beweis. Man betrachte die Schenkel AC und CB, welche eine gerade Linie bilden, als Durchmesser und beschreibe darüber aus dem gemeinschaftlichen Scheitelpunkt C den Halbkreis ADB. Es ist nun

Bogen AD + Bogen DB = ½ Peripherie = 180° = 2R.

§. 38.

Zusatz. Enthält der eine Nebenwinkel 90°, oder ist derselbe gleich einem Rechten, so muß der andere Nebenwinkel gleichfalls 90° enthalten oder einem Rechten gleich sein. Ein Rechter ist daher seinem Nebenwinkel gleich.

§. 39.

Zusatz. Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Supplement- und Complementwinkel.

§. 40.

Zusatz. Alle Winkel, welche aus einem Punkte einer Geraden entweder über, oder unter derselben errichtet werden, enthalten zusammengenommen 180° oder betragen zwei Rechte. Alle Winkel, welche man um einen Punkt herum machen kann, betragen zusammengenommen 360° oder vier Rechte.

§. 41.

Lehrsatz. Zwei Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel und Schenkel haben, und zusammen 180° enthalten oder 2R betragen, sind Nebenwinkel, d. i. die beiden anderen Schenkel bilden eine Gerade, oder der eine derselben ist die Verlängerung des andern. Ist z. B. (Fig. 20) $\angle ACB + \angle DCB = 2R$, so ist CD die Verlängerung von AC, oder ACD ist eine Gerade.

Beweis. Wäre CD die Verlängerung von AC nicht, so müßte es eine andere Gerade über oder unter CD sein z. B. CM. Nach §. 37 wäre nun

$\angle ACB + \angle BCM = 2R$, und nach der Annahme

$\angle ACB + \angle DCB = 2R$, folglich (nach §. 11, 4)

$\angle ACB + \angle BCM = \angle ACB + \angle DCB$, und

$\angle BCM = \angle DCB$,

was unmöglich ist. Es ist daher auch unmöglich, daß CM die Verlängerung von AC sei.

Da sich nun dasselbe von jeder andern Geraden, die nicht mit CD zusammenfällt, beweisen läßt, so kann AC keine andere Verlängerung, als nur CD haben, folglich sind die Winkel ACB und DCB Nebenwinkel.

§. 42.

Lehrsatz. Scheitelwinkel sind einander gleich. So ist (Fig. 21) $\angle x = \angle y$, und $\angle m = \angle n$.

Beweis. Es ist (nach §. 37)

$\angle x + \angle m = 2R$, und eben so

$\angle m + \angle y = 2R$, also (nach §. 11, 4)

$\angle x + \angle m = \angle m + \angle y$ und (nach §. 11, 5)

$\angle x = \angle y$.

Eben so ist

$\angle m + \angle y = 2R$ und

$\angle y + \angle n = 2R$, also

$\angle m + \angle y = \angle y + \angle n$ und

$\angle m = \angle n$.

§. 43.

Aufgabe. An den Punkt E einer Geraden ED (Fig. 22) einen Winkel zu legen, der einem gegebenen $\angle ACB$ gleich ist.

Auflösung und Beweis. Man beschreibe aus dem Scheitelpunkte des gegebenen Winkels zwischen seinen Schenkeln mit beliebigem Halbmesser, z. B. CF, einen Kreisbogen, und aus dem gegebenen Punkte E über der Geraden ED mit gleichem Halbmesser einen unbestimmten Bogen GL. Macht man nun die Sehne GN=FK und zieht EN, so ist $\angle NED = \angle ACB$ oder $\angle NEG = \angle FCK$, weil in gleichen Kreisen zu gleichen Sehnen gleiche Bogen und gleiche Mittelpunktwinkel gehören.

§. 44.

Zusatz. Soll an den Punkt O einer Geraden OG (Fig. 23) ein Winkel gelegt werden, welcher zwei-, drei- u. s. w. mal so groß ist, als ein gegebener $\angle DEF$: so beschreibt man gleichfalls aus dem Scheitel des gegebenen Winkels zwischen seinen Schenkeln mit beliebigem Halbmesser einen Bogen CB, und aus dem gegebenen Punkte O über OG mit gleichem Halbmesser einen unbestimmten Bogen MN.

Trägt man an diesem Bogen die Sehne CB zwei-, drei- u. s. w. mal auf, und zieht OK, OL u. s. w., so erhält man Winkel, die zwei-, drei- u. s. w. mal so groß sind, als der gegebene ∠DEF.

Anmerkung. Zur Lösung solcher Aufgaben kann auch der sogenannte Transporteur, d. i. ein in Grade getheilter Halbkreis von Metall, Holz, dienen.

Eintheilung und Congruenz der Dreiecke.

§. 45.

Erklärung. In jedem Dreiecke sind 6 Stücke zu merken, nämlich: 3 Seiten und 3 Winkel.

In Hinsicht der Seiten unterscheidet man gleichseitige Dreiecke, wenn alle drei Seiten einander gleich sind, gleichschenklige, wenn nur zwei Seiten einander gleich sind, und ungleichseitige, wenn keine Seite der andern gleich ist.

Im gleichschenkligen Dreiecke heißt die ungleiche Seite Grundlinie oder Grundseite.

In Hinsicht der Winkel heißt ein Dreieck spitzwinklig, wenn alle drei Winkel spitz sind, rechtwinklig, wenn ein Winkel ein Rechter ist, und stumpfwinklig, wenn ein Winkel ein stumpfer ist.

Im rechtwinkligen Dreiecke nennt man die Seite, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, Hypotenuse, und die Seiten, welche den rechten Winkel bilden, Katheten.

§. 46.

Erklärung. Wird in einem Dreiecke eine Seite verlängert, so heißt der Winkel, welcher außerhalb des Dreiecks entsteht, äußerer Winkel, diejenigen Winkel des Dreiecks aber, welche nicht Nebenwinkel des äußeren sind, heißen gegenüberliegende innere Winkel.

§. 47.

Lehrsatz. Dreiecke sind kongruent oder decken sich, wenn die drei Seiten des einen Dreiecks den drei Seiten des andern gleich sind.

Ist z. B. (Fig. 25) $AB=DE$, $BC=EF$ und $AC=DF$, so ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Man beschreibe aus A und D mit dem Halbmesser $AB=DE$, ferner aus C und F mit dem Halbmesser $CB=EF$ Kreise, die sich in den Punkten B und E durchschneiden.

Man lege nun $\triangle DEF$ mit den Kreisen so auf $\triangle ABC$, daß DF mit AC zusammenfällt, und der Punkt E nach der Richtung hin zu liegen kömmt, wie B. Es werden nun die Kreise des $\triangle DEF$ mit den Kreisen des $\triangle ABC$ zusammenfallen, weil sie gegenseitig mit gleichen Halbmessern beschrieben sind, und ihre Mittelpunkte in einander liegen. Da aber der Punkt E sowohl in dem Kreise um D, als auch in dem Kreise um F liegt, nämlich im gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte, so muß er gleichfalls, nach dem Aufeinanderlegen, sowohl im Kreise um A, als auch im Kreise um C, nämlich in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte zu liegen kommen. Es fällt daher auch DE mit AB, und FE mit CB zusammen, weil die Endpunkte dieser Linien zusammenfallen, und zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade möglich ist. Da nun die Grenzen des einen Dreiecks mit den Grenzen des andern zusammenfallen, so sind die Dreiecke kongruent, und daher auch die Winkel gleich, nämlich $\angle b=\angle e$, weil E auf B, ED auf BA und EF auf BC fällt, ferner $\angle c=\angle f$, weil F auf C, FE auf CB, und FD auf CA liegt, endlich $\angle a=\angle d$, weil D auf A, DF auf AC, DE auf AB liegt.

In kongruenten Dreiecken stehen daher gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

§. 48.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent oder decken sich, wenn zwei Seiten und der durch sie gebildete Winkel des einen Dreiecks zweien Seiten und dem durch diese gebildeten Winkel des andern Dreiecks gleich sind. Ist z. B. (Fig. 26)

AB=DE, BC=EF und
$\angle$ABC = $\angle$DEF, so ist
$\triangle$ABC$\cong$$\triangle$DEF.

Beweis. Man lege $\triangle$DEF so auf $\triangle$ABC, daß E auf B falle und ED in die Richtung von BA, so muß D auf A fallen, weil AB=DE ist. Da ferner $\angle$ABC=$\angle$DEF, so fällt EF auf BC und F auf C, weil BC=EF. Es liegt nun D auf A und F auf C, daher muß auch DF mit AC zusammenfallen, weil zwischen zwei Punkten nur eine einzige Gerade möglich ist. Da nun die Grenzen des einen Dreiecks mit den Grenzen des andern zusammenfallen, so sind die Dreiecke kongruent, und $\angle$a=$\angle$d, $\angle$c=$\angle$f, AC=DF.

§. 49.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent oder decken sich, wenn eine Seite und die zwei anliegenden Winkel des einen Dreiecks einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln des andern Dreiecks gleich sind. Ist z. B. (Fig. 27) AC=DF,

$\angle$BAC=$\angle$EDF und
$\angle$ACB=$\angle$DFE,
so ist auch $\triangle$ABC$\cong$$\triangle$DEF.

Beweis. Man lege $\triangle$DEF so auf $\triangle$ABC, daß D auf A, DF in die Richtung von AC falle, so muß F auf C fallen, weil DF=AC ist.

Da $\surd EDF = \surd BAC$, so muß DE und daher auch der Punkt E in die Richtung von AB fallen; da ferner $\surd EFD = \surd BCA$, so muß FE und also auch E in die Richtung von CB fallen. Es muß sonach E, der Durchschnittspunkt von DE und FE, in CB und AB zugleich liegen; er kann daher nur in ihrem Durchschnittspunkte, nämlich in B liegen, weil zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können.

Es fällt demnach auch DE mit AB, und FE mit CB zusammen.

Da nun die Grenzen des einen Dreiecks auf den Grenzen des andern zu liegen kommen, so sind die Dreiecke kongruent, und daher $\surd ABC = \surd DEF$,

$AB = DE$ und $BC = EF$.

§. 50.

Aufgabe. **Ein Dreieck zu machen, das mit einem gegebenen $\triangle ABC$ (Fig. 28) kongruent ist.**

Auflösung und Beweis. Man mache eine Gerade $DE = AC$, beschreibe aus D mit einem Halbmesser $= AB$, und aus E mit einem Halbmesser $= CB$ Kreisbogen. Aus dem Durchschnittspunkte F ziehe man FD und FE, so ist $\triangle DEF \cong \triangle ABC$, weil die drei Seiten des einen Dreiecks gleich sind den drei Seiten des andern.

Zusatz. Auf gleiche Weise wird die Aufgabe gelös't: „Es sind die drei Seiten eines Dreiecks gegeben, man soll damit das Dreieck beschreiben."

§. 51.

Aufgabe. **Es sind zwei Seiten M und N und der durch sie gebildete $\surd x$ eines Dreiecks (Fig. 29) gegeben; man soll damit das Dreieck errichten.**

Auflösung und Beweis. Man mache eine Gerade

AB=M, lege an den Endpunkt A den ∠x, mache den Schenkel AC=N und ziehe BC, so ist △ACB das verlangte, weil es mit dem Dreiecke, worin die Seiten M und N und der durch sie gebildete ∠x vorkommen, kongruent ist.

§. 52.

Aufgabe. Es sind von einem Dreiecke eine Seite N (Fig. 30) und die zwei anliegenden Winkel, ∠x und ∠y, gegeben; man soll damit das Dreieck errichten.

Auflösung und Beweis. Man mache wieder eine Gerade AB=N, und lege an den Punkt A den einen Winkel und an den Punkt B den andern Winkel, so entsteht hierdurch ein Dreieck, das mit demjenigen kongruent ist, welches die Seite N und ∠x und ∠y enthält.

§. 53.

Aufgabe. Einen gegebenen ∠ABC (Fig. 31) zu halbiren.

Auflösung. Man schneide von den Schenkeln des gegebenen Winkels gleiche Stücke BD und BE ab, und beschreibe aus D und E mit gleichen Halbmessern Kreisbogen, die sich in O schneiden. Zieht man nun BO, so wird hierdurch ∠ABC halbirt.

Beweis. Man ziehe DO und EO. Nach dem gegebenen Verfahren ist nun

BD=BE, DO=EO, ferner BO=BO,
folglich △DBO $\cong$ △EBO, und
∠DBO $\cong$ ∠OBE.

Man kann jede Hälfte des Winkels wieder halbiren, und daher einen jeden Winkel durch fortgesetztes Halbiren in 2, 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile theilen.

§. 54.

Aufgabe. Einen gegebenen Bogen AB (Fig. 32) zu halbiren.

Auflösung und Beweis. Man beschreibe aus den Endpunkten A und B des Bogens mit gleichen Halbmessern zwei Kreise, die sich in D schneiden, und ziehe aus dem Mittelpunkte C die Gerade CD, so wird durch diese der Bogen AB in O halbirt; denn der Mittelpunktwinkel ACB wird durch CD halbirt, daher auch der zugehörige Bogen AB.

Durch fortgesetztes Halbiren kann man jeden Kreisbogen in 2, 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile theilen.

§. 55.

Aufgabe. Eine gegebene Gerade CD (Fig. 33) zu halbiren.

Auflösung. Man beschreibe aus den Endpunkten C und D der gegebenen Linie mit gleichen Halbmessern zwei Kreisbogen über und zwei Kreisbogen unter derselben, welche sich in O und G schneiden, und ziehe OG, so wird hierdurch CD halbirt.

Beweis. Denkt man sich die gleichen Halbmesser CO, DO, CG, DG gezogen, so ist $\angle COD$ durch das angegebene Verfahren (nach §. 53) halbirt, sonach $\angle COB = \angle DOB$; ferner ist $CO = DO$ und $OB = OB$, daher $\triangle CBO \cong \triangle DBO$, und $CB = DB$.

Durch fortgesetztes Halbiren kann man aus jeder Geraden 2, 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile machen.

Abhängigkeit der Seiten von den Winkeln und umgekehrt der Winkel von den Seiten im Dreiecke.

§. 56.

Lehrsatz. Sind in einem Dreiecke zwei Seiten gleich, so sind die ihnen gegenüberstehenden Winkel auch gleich; oder in einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundseite einander gleich. Ist z. B. (Fig. 34) AB=CB, so ist auch

$$\angle BAC = \angle BCA.$$

Beweis. Man ziehe von B auf die Mitte von AC die Gerade BD, so ist $\triangle ABD \cong \triangle BDC$, weil die drei Seiten des einen Dreiecks den drei Seiten des andern gleich sind, folglich müssen auch die gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel BAD und BCD gleich sein, oder $\angle BAC = \angle BCA$.

§. 57.

Zusatz. Im gleichseitigen Dreiecke sind auch die drei Winkel gleich, da sich beweisen läßt, daß je zwei Winkel, also auch, daß alle drei Winkel gleich sind. Ein gleichseitiges Dreieck ist also eine regelmäßige Figur.

§. 58.

Lehrsatz. Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so sind die ihnen gegenüberliegenden Seiten auch gleich. Ist z. B. (Fig. 35)

$\angle BAC = \angle BCA$, so ist auch

AB=CB.

Beweis. Wären die Seiten AB und CB nicht gleich, so müßte die eine größer oder kleiner, als die andere sein. Gesetzt nun AB wäre größer, als BC, so könnte man von

jener ein Stück $AD = BC$ abschneiden, und von C nach D die Gerade CD ziehen, wodurch von $\triangle ABC$ das Dreieck ADC abgeschnitten würde.

Da aber $AD = BC$, $AC = AC$ und $\angle DAC = \angle BAC$ ist, so wäre $\triangle ADC \cong \triangle ABC$, was unmöglich ist, weil $\triangle ADC$ nur ein Theil von $\triangle ABC$ ist.

Es ist daher auch unmöglich, daß $AB > CB$ sein kann. Auf gleiche Weise läßt sich beweisen, daß AB nicht kleiner, als CB sein kann. Da nun AB weder größer noch kleiner, als CB ist, so muß $AB = CB$ sein.

§. 59.

Zusatz. Sind in einem Dreiecke die drei Winkel gleich, so sind auch die drei Seiten gleich, weil sich beweisen läßt, daß je zwei Seiten, folglich auch die drei Seiten einander gleich sind.

§. 60.

Lehrsatz. Ist in einem Dreiecke ein Winkel größer, als ein anderer, so ist die dem größeren Winkel gegenüberliegende Seite größer, als die dem kleineren Winkel gegenüberliegende Seite, oder:

In jedem Dreiecke steht dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber. Ist z. B. (Fig. 36)

$\angle ABC > \angle CAB$, so ist auch

$AC > BC$.

Beweis. Man schneide von dem größeren Winkel ABC ein Stück ABD ab, das dem kleineren $\angle CAB$ gleich ist und der dritten Seite AB anliegt, so erhält man (nach §. 58)

$AD = BD$. Es ist aber

$BD + DC > BC$, mithin auch

$AD + DC > BC$, oder

$AC > BC$.

§. 61.

Lehrsatz. Ist in einem Dreiecke eine Seite größer, als eine andere, so ist der Winkel, welcher der größeren Seite gegenüberliegt, größer als der, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt, oder:

In jedem Dreiecke steht der größeren Seite der größere Winkel gegenüber. Ist z. B. (Fig. 37)

$$BC > AB, \text{ so ist auch } \angle BAC > \angle ACB.$$

Beweis. $\angle BAC$ und $\angle ACB$ können einander nicht gleich sein, weil alsdann (nach §. 58) auch die Seiten BC und AB gleich sein müßten. $\angle BAC$ kann aber auch nicht kleiner sein, als $\angle ACB$, weil dann (nach §. 60) auch BC kleiner als AB sein müßte, was in beiden Fällen der Annahme widerspräche.

Da nun $\angle BAC$ weder gleich noch kleiner, als $\angle ACB$ sein kann, so muß $\angle BAC > \angle ACB$ sein.

Von der senkrechten Linie.

---

§. 62.

Erklärung. Eine senkrechte Linie (der Kürze wegen: eine Senkrechte) ist diejenige Linie, welche mit einer andern gleiche Nebenwinkel, d. i. beiderseits rechte Winkel bildet.

§. 63.

Lehrsatz. In einem Punkte einer Geraden kann nur *eine* Senkrechte errichtet werden.

Beweis. Gesetzt man könnte in dem Punkte D (Fig. 38) der Geraden BC, nebst der Senkrechten DE, noch eine zweite Senkrechte DF errichten, so wäre

$$\angle EDC = R \text{ und } \angle FDC = R, \text{ folglich } \angle EDC = \angle FDC.$$

Da aber unmöglich das Ganze einem seiner Theile gleich sein kann, so ist es auch unmöglich, im Punkte D der Geraden BC zwei Senkrechten DE und DF zu errichten.

§. 64.

Lehrsatz. Von einem Punkte, z. B. A (Fig. 39) außerhalb einer Geraden BC kann nur *eine* Senkrechte AD auf diese gezogen werden.

Beweis. Gesetzt man könnte aus A auf BC eine zweite Senkrechte AF ziehen, so entstände hierdurch ein $\triangle DAF$, worin $\angle ADF = \angle AFD = R$ wäre.

Man verlängere nun AD, mache die Verlängerung $DG = DA$ und ziehe FG, so ist:

$DA = DG$, $DF = DF$ und $\angle ADF = \angle GDF$,
folglich $\triangle ADF \cong \triangle GDF$ (nach §. 48), und
daher $\angle DFA = \angle GFD = R$, folglich wäre
$\angle AFD + \angle GFD = 2R$.

Es müßten nun (nach §. 41) die Schenkel AF und GF eine Gerade bilden. Da aber auch ADG eine Gerade ist, so gäbe es zwischen den zwei Punkten A und G zwei Geraden, was unmöglich ist; daher ist es auch unmöglich, aus dem Punkte A auf BC zwei Senkrechten zu errichten.

§. 65.

Lehrsatz. Errichtet man in der Mitte einer Geraden eine Senkrechte, so sind alle Punkte der Senkrechten gleich weit von den Endpunkten der Geraden entfernt. Ist z. B. (Fig. 40)

$DC \perp AB$ und $CA = CB$, so ist $DA = DB$.

Beweis. Man ziehe DA und DB, so ist $\triangle ADC \cong \triangle DCB$, weil $AC = BC$, $DC = DC$ und $\angle ACD = \angle BCD = R$ ist, folglich $DA = DB$.

§. 66.

Lehrsatz. Unter allen Geraden, die man aus einem Punkte außerhalb einer Geraden auf diese ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste. Zieht man z. B. (Fig. 41) aus A auf BC die Senkrechte AD, und die nicht durch D gehenden Geraden AE, AF, AG u. s. w., so ist: $AD < AE$ oder $AD < AF$ u. s. w.

Beweis. Man verlängere AD, mache die Verlängerung $DM = AD$ und ziehe ME, MF u. s. w.

Nun ist $\angle ADE = \angle EDM = R$, folglich $CD \perp AM$. Da aber DM gleich AD gemacht wurde, so ist (nach §. 65)

$AE = ME$, $AF = MF$ u. s. w.

Es ist aber (nach §. 29)

$AM < AE + ME$ oder

$AD + DM < AE + ME$, oder

$AD + AD < AE + AE$ oder

$2AD < 2AE$, daher auch $AD < AE$.

Eben so wird bewiesen, daß $AD < AF$ u. s. w. sei.

Man pflegt die Entfernung eines Punktes A von einer Geraden BC durch die kürzeste Linie anzugeben, welche von A auf BC gezogen werden kann; folglich ist die Entfernung eines Punktes A von einer Geraden BC nichts anders, als die Senkrechte AD.

§. 67.

Lehrsatz. Zieht man aus einem Punkte, z. B. A, (Fig. 41) außerhalb einer Geraden BC eine Senkrechte AD und mehre schiefen Linien AK, AE, AF u. s. w., so sind die zu beiden Seiten der Senkrechten gleich weit entfernten einander gleich, und die von der Senkrechten entferntere größer, als die nähere.

Ist 1) DE=DK, DF=DL u. s. w., so ist
AE=AK, AF=AL u. s. w., und ist
2) DF>DE, DG>DF u. s. w., so ist auch
AF>AE, AG>AF u. s. w.

Beweis zu 1). Da AD ⊥ auf KE und DK=DE, so ist (nach §. 65) AE=AK. Eben so läßt sich beweisen, daß AF=AL ist u. s. w.

Beweis zu 2). Man verlängere AD, mache die Verlängerung DM=AD und ziehe ME, MF u. s. w. Nun ist ∠ADE=∠EDM=R, folglich GD ⊥ auf AM, und da AD gleich DM gemacht wurde, so ist (nach §. 65)
AE=ME, AF=MF u. s. w.

Ferner ist (nach §. 29) AF+MF>AE+ME, oder
AF+AF>AE+AE, oder
2AF>2AE, folglich
AF>AE.

Eben so wird bewiesen, daß AG>AF ist, u. s. w.

Zusatz. Aus einem Punkte außerhalb einer Geraden können auf diese nicht mehr, als zwei gleiche Geraden gezogen werden, weil immer nur je zwei zu beiden Seiten der Senkrechten gleich weit entfernt, und daher gleich sein können.

Eine Gerade kann daher einen Kreis nur in zwei Punkten schneiden; denn schnitte sie den Kreis auch nur in drei Punkten, so könnte man aus dem Mittelpunkte an diese drei Punkte drei Halbmesser ziehen, welche einander gleich wären; es müßten deßhalb aus einem Punkte (dem Mittelpunkte) außerhalb einer Geraden drei gleiche Geraden auf diese gezogen werden können, was aber nach Obigem unmöglich ist.

§. 68.

Aufgabe. In einem Punkte A (Fig. 42) einer Geraden CB eine Senkrechte zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Man schneide zu beiden Seiten von A gleiche Stücke AD und AF ab, beschreibe aus D und F mit gleichen Halbmessern zwei Kreisbogen, welche sich in E schneiden, und ziehe EA, so ist diese $\perp$ auf CB.

Zieht man nämlich die gleichen Halbmesser DE und FE, so ist DE=FE, AD=AF und AE=AE, folglich

$\triangle AED \cong \triangle AEF$, und daher

$\sqrt{}EAD = \sqrt{}EAF = R$.

Soll in dem Endpunkte einer Geraden eine Senkrechte errichtet werden, so kann man das eben gezeigte Verfahren einhalten, wenn man die Gerade verlängert. Kann oder soll die Gerade aber nicht verlängert werden, so verfährt man nach §. 98, 2.

§. 69.

Aufgabe. Aus einem Punkte A außerhalb einer Geraden BC (Fig. 43) eine Senkrechte auf diese zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Man beschreibe aus A einen Kreis, welcher die Gerade BC oder deren Verlängerung in zwei Punkten D und E schneidet; ferner beschreibe man aus D und E mit gleichen Halbmessern zwei Kreisbogen, welche sich in F schneiden, und ziehe AF, so ist diese $\perp$ auf BC.

Zieht man nämlich die gleichen Halbmesser AD und AE, so ist der durch sie gebildete Winkel DAE (nach §. 53) halbirt; daher $\sqrt{}DAG = \sqrt{}GAE$. Es ist aber auch AD=AE und AG=AG, folglich $\triangle AGD \cong \triangle AGE$, und $\sqrt{}AGD = \sqrt{}AGE = R$.

Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke.

§. 70.

Lehrsatz. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind

kongruent oder decken sich, wenn die Hypotenuse und eine Kathete des einen Dreiecks der Hypotenuse und einer Kathete des andern Dreiecks gleich sind. Ist z. B. (Fig. 44)

$\angle ACB = \angle DFE = R$,
$AB = DE$ und
$BC = EF$, so ist
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Man lege $\triangle DEF$ so auf $\triangle ABC$, daß E auf B, und EF in die Richtung von BC falle, so wird, weil $EF = BC$, der Punkt F mit C zusammenfallen, und FD, weil $\angle EFD = \angle BCA = R$ ist, auf CA und der Punkt D entweder zwischen A und C, wie G, oder auf die Verlängerung von AC, wie K, oder auf A selbst fallen müssen.

Gesetzt nun D fiele zwischen A und C, wie G, so daß $\triangle GBC$ das auf $\triangle ABC$ gelegte Dreieck DEF wäre: so hätte man $BG = ED = BA$, was aber (nach §. 67) unmöglich ist; es ist daher auch unmöglich, daß D zwischen A und C, wie G falle. Der Punkt D kann aber auch nicht auf die Verlängerung von AC, wie K fallen, weil sonst $BK = ED = BA$ wäre, was gleichfalls (nach §. 67) unmöglich ist.

Da nun D weder zwischen A und C, noch auf die Verlängeruug von AC fallen kann, so muß er auf A selbst fallen. Da demnach die Grenzen des einen Dreiecks mit den Grenzen des andern zusammenfallen, so sind diese Dreiecke kongruent.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse M und eine Kathete N (Fig. 45) eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben; man soll damit das Dreieck beschreiben.

Auflösung und Beweis. Man verbinde zwei Geraden unter einem rechten Winkel mit einander, mache die eine

Gerade AB gleich der Kathete N, beschreibe aus A mit einem Halbmesser=M einen Kreisbogen, der BD in C schneidet, und ziehe AC, so ist $\triangle ABC$ das verlangte, weil es mit dem rechtwinkligen Dreiecke, welches die Hypotenuse M und die Kathete N enthält, kongruent ist.

Vom gleichschenkligen Dreiecke.

---

§. 71.

Lehrsatz. Zieht man in einem gleichschenkligen Dreiecke von der Mitte der Grundlinie nach der Spitze eine Gerade, so wird das ganze Dreieck und der Winkel an der Spitze halbirt, und die gezogene Linie steht senkrecht auf der Grundlinie. Ist z. B. (Fig. 46) AC=BC und AD=BD, so ist

$$\triangle DAC \cong \triangle DBC$$
$$\angle ACD = \angle DCB$$
$$\angle ADC = \angle BDC = R.$$

Beweis. Da AC=BC, AD=BD und CD=CD, so ist (nach §. 47)

$$\triangle DAC \cong \angle DBC, \text{ folglich}$$
$$\angle ACD = \angle DCB \text{ und}$$
$$\angle ADC = \angle BDC = R.$$

§. 72.

Lehrsatz. Halbirt man in einem gleichschenkligen Dreiecke den Winkel an der Spitze, so wird durch die Theilungslinie das ganze Dreieck und die Grundlinie halbirt, und die Theilungslinie steht senkrecht auf der Grundlinie. Ist z. B. (Fig. 46)

AC=BC und

∠ACD=∠BCD, so ist auch
△ACD≅△BCD, ferner
AD=BD und
∠ADC=∠BDC=R.

Beweis. Da AC=BC, CD=CD und
∠ACD=∠DCB ist, so ist (nach §. 48)
△ACD≅△BCD, folglich
AD=BD und ∠ADC=∠BDC=R.

§. 73.

Lehrsatz. Errichtet man in der Mitte der Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks eine Senkrechte, so geht diese durch die Spitze. Ist z. B. (Fig. 47) AC=BC und AD=BC, so muß die in D errichtete Senkrechte durch die Spitze gehen.

Beweis. Ginge die in D errichtete Senkrechte nicht durch die Spitze, sondern nähme eine andere Richtung z. B. die von DE, so könnte man von der Mitte der Grundseite nach der Spitze eine Gerade ziehen, welche (nach §. 71) ebenfalls senkrecht ist. Auf diese Weise hätte man in dem Punkte D der Geraden AB zwei Senkrechten, was (nach §. 63) unmöglich ist. Es muß daher die in D errichtete Senkrechte durch die Spitze gehen.

§. 74.

Lehrsatz. Fällt man von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Senkrechte auf die Grundseite, so geht sie durch deren Mitte.

Beweis. Gesetzt die Senkrechte aus der Spitze C (Fig. 48) auf die Grundseite AB ginge nicht durch deren Mitte D, so errichte man in D eine Senkrechte, welche (nach vorhergehendem §.) durch die Spitze des Dreiecks gehen muß. Auf diese Weise gäbe es aus dem Punkte C außer-

halb der Geraden AB zwei Senkrechten auf diese, was aber (nach §. 64) unmöglich ist. Es muß daher die Senkrechte aus der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks auf die Grundlinie durch deren Mitte gehen.

Anmerkung. Jede Sehne im Kreise läßt sich als Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks betrachten, dessen Spitze im Mittelpunkte liegt, und dessen gleiche Seiten Halbmesser sind.

Zieht man daher aus dem Mittelpunkte auf die Mitte der Sehne eine Gerade, so steht diese senkrecht auf der Sehne; ferner errichtet man in der Mitte einer Sehne eine Senkrechte, so muß diese durch den Mittelpunkt gehen, und fällt man aus dem Mittelpunkte auf eine Sehne eine Senkrechte, so muß diese durch die Mitte der Sehne gehen.

Von den Parallellinien.

§. 75.

Erklärung. Zwei gerade Linien heißen gleichlaufend oder parallel, wenn sie überall gleich weit von einander entfernt sind. Da man aber unter der Entfernung eines Punktes von einer Geraden nichts anders versteht, als die Senkrechte, welche von dem Punkte auf die Gerade gezogen wird: so folgt, daß bei den Parallelen alle Senkrechten, die aus beliebigen Punkten der einen Parallelen auf die andere gezogen werden, einander gleich sind. Aus der Gleichheit dieser Senkrechten folgt aber, daß Parallelen, sie mögen noch so weit verlängert werden, einander niemals näher kommen oder sich durchschneiden.

§. 76.

Erklärung. Werden zwei Geraden AB und CD

(Fig. 49 und Fig. 50) von einer dritten MN geschnitten, so werden die hierdurch gebildeten Winkel auf folgende Weise benannt:

1) Wechselwinkel, und zwar

a) innere: ∠AGO und ∠GOD oder ∠x und ∠y,
ferner ∠BGO und ∠COG oder ∠m und ∠n,

b) äußere: ∠AGN und ∠DOM oder ∠r und ∠s,
ferner ∠NGB und ∠COM oder ∠v und ∠w,

2) entsprechende Neigungswinkel:
∠AGN und ∠COG oder ∠r und ∠n,
ferner ∠NGB und ∠GOD oder ∠v und ∠y,
eben so ∠AGO und ∠COM oder ∠x und ∠w,
endlich ∠BGO und ∠DOM oder ∠m und ∠s,

3) anliegende Winkel, und zwar

a) innere: ∠AGO und ∠COG oder ∠x und ∠n,
ferner ∠BGO und ∠GOD oder ∠m und ∠y,

b) äußere: ∠AGN und ∠COM oder ∠r und ∠w,
ferner ∠NGB und ∠DOM oder ∠v und ∠s.

§. 77.

Grundsatz. Zwei Geraden schneiden sich, wenn die Summe zweier inneren anliegenden Winkel weniger beträgt, als zwei Rechte.

§. 78.

Lehrsatz. Wenn zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten werden, so sind

1) die Wechselwinkel, sowohl die inneren, als die äußeren einander gleich;

2) die entsprechenden Neigungswinkel sind einander gleich, und

3) beträgt die Summe zweier inneren oder äußeren anliegenden Winkel zwei Rechte.

Ist z. B. (Fig. 51) $AB \parallel CD$, und MN die schneidende Linie, so ist

1) $\angle AOG = \angle OGD$ und $\angle BOG = \angle CGO$.

Beweis. Man ziehe aus O auf CD die Senkrechte OK und aus G auf AB die Senkrechte GL, so entstehen zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke GOK und GOL (nach §. 70), weil $OG = OG$ und $OK = GL$. Es ist daher

$$\angle LOG = \angle OGK \text{ oder } \angle AOG = \angle OGD.$$

Da ferner $\angle AOG + \angle BOG = 2R$, und
$\angle OGD + \angle CGO = 2R$, so folgt
$\angle AOG + \angle BOG = \angle OGD + \angle CGO$, daher
$\angle BOG = \angle CGO$.

Ist der eine von den Wechselwinkeln ein Rechter, so muß auch der andere ein Rechter sein; folglich muß jede Gerade, welche auf der einen Parallelen senkrecht steht, auch auf der andern senkrecht stehen.

Der Beweis für die übrigen Fälle ergiebt sich nun leicht. Ist nämlich (Fig. 50) $AB \parallel CD$ und MN die schneidende Linie, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß $\angle x = \angle y$ ist.

Die Gleichheit der äußeren Wechselwinkel z. B. $\angle r$ und $\angle s$ wird hieraus so bewiesen:

$\angle r + \angle x = 2R$ und
$\angle y + \angle s = 2R$, folglich
$\angle r + \angle x = \angle y + \angle s$. Zieht man von diesen beiden gleichen Summen die gleichen Winkel x und y ab, so ergiebt sich: $\angle r = \angle s$.

Eben so folgt hieraus 2) die Gleichheit eines Paares entsprechender Neigungswinkel, z. B. $\angle r$ und $\angle n$;

denn $\angle r + \angle x = \angle n + \angle y = 2R$,
da nun $\angle x = \angle y$ ist, so folgt:
$\angle r = \angle n$.

3) Daß die Summe zweier inneren anliegenden Winkel z. B. $\angle m$ und $\angle y$ zwei Rechte beträgt, folgt so:

$\angle x + \angle m = 2R$ (nach §. 37); da aber $\angle x = \angle y$ ist, so kann statt $\angle x$ der Winkel y gesetzt werden, folglich $\angle y + \angle m = 2R$.

Eben so folgt $\angle r + \angle w = 2R$; denn $\angle r + \angle x = 2R$, da aber $\angle w = \angle y = \angle x$ ist, so folgt:

$$\angle r + \angle x = \angle r + \angle w = 2R.$$

§. 79.

Lehrsatz. Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, und es sind

1) entweder die inneren oder äußeren Wechselwinkel, oder
2) die entsprechenden Neigungswinkel einander gleich, oder beträgt
3) ein Paar innerer oder äußerer anliegenden Winkel zwei Rechte, so sind die zwei Geraden parallel.

Ist 1) z. B. (Fig. 52) $\angle AOG = \angle OGD$, so ist AB‡CD.

Beweis. Wäre AB nicht parallel mit CD, so könnte durch O eine andere Gerade KL mit CD parallel gezogen werden. Nun wäre nach dem vorhergehenden §. $\angle LOG = OGD$. Nach der Voraussetzung ist aber $\angle AOG = \angle OGD$; folglich wäre $\angle AOG = \angle LOG$, d. i. der Theil wäre dem Ganzen gleich, wenn nicht AB, sondern eine andere Gerade mit CD parallel wäre, was unmöglich ist. Es ist daher auch nicht möglich, daß außer AB irgend eine andere Gerade zu CD parallel sei, wenn sie durch O gezogen wird. Wenn demnach $\angle AOG = \angle OGD$ ist, so ist AB ‡ CD. Dasselbe läßt sich beweisen, wenn die anderen Bedingungen Statt finden, weil sich alsdann jedesmal beweisen läßt, daß die inneren Wechselwinkel

gleich sind. Ist z. B. (Fig. 50) $\angle r = \angle s$, so ist $AB \parallel CD$; denn $\angle r + \angle x = \angle y + \angle s$, als Nebenwinkel. Läßt man beiderseits Gleiches, nämlich $\angle r = \angle s$, weg, so folgt wieder:

$\angle x = \angle y$, und daher nach dem Vorhergehenden:

$AB \parallel CD$.

Ist 2) z. B. $\angle v = \angle y$, so folgt wieder, da

$\angle v = \angle x$, als Scheitelwinkel ist,

$\angle x = \angle y$, also $AB \parallel CD$.

Ist 3) z. B. $\angle m + \angle y = 2R$, so folgt wieder:

$\angle x = \angle y$; denn

$\angle x + \angle m = \angle m + \angle y = 2R$.

Läßt man nun $\angle m$ beiderseits weg, so erhält man: $\angle x = \angle y$, also $AB \parallel CD$.

Eben so wird bewiesen, daß $AB \parallel CD$ ist, wenn ein Paar äußerer anliegenden Winkel zwei Rechte beträgt.

Ist z. B. $\angle s + \angle v = 2R$, so folgt:

$\angle s + \angle v = \angle y + \angle s = 2R$, daher

$\angle v = \angle y$.

Da aber $\angle v = \angle x$, als Scheitelwinkel ist, so folgt auch (nach §. 11, 6) $\angle x = \angle y$.

§. 80.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt O zu einer Geraden CD (Fig. 53) eine Parallele zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Man ziehe aus O an CD unter einem beliebigen Winkel die Gerade OB, und mache $\angle FOB = \angle OBD$, so ist nach dem vorhergehenden §. FO und deren Verlängerung parallel mit CD.

Die Aufgabe wird gleichfalls gelöst, wenn man $\angle KOG = \angle OBD$ macht.

Anmerkung. Hierauf gründet sich die Anwendung der rechtwinkligen Dreiecke aus Holz, um leicht und schnell auf dem Pa-

piere durch gegebene Punkte Parallellinien mit gegebenen Geraden zu ziehen.

§. 81.

Lehrsatz. Sind zwei Geraden mit einer dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel. Ist z. B. (Fig. 54)

AB‡CD und

EF‡CD, so ist auch

AB‡EF.

Beweis. Man ziehe die Gerade MN so, daß sie die drei gegebenen Linien schneidet, so ist (nach §. 78)

$\sqrt{}$AOG=$\sqrt{}$CGL und

$\sqrt{}$ELM=$\sqrt{}$CGL, folglich auch

$\sqrt{}$AOG=$\sqrt{}$ELM, und daher (nach §. 79)

AB ‡ EF.

§. 82.

Lehrsatz. Sind die Schenkel zweier Winkel, welche beide spitz oder stumpf sind, gegenseitig parallel, so sind diese Winkel gleich. Sind z. B. (Fig. 55) die Winkel ABC und DEF, beide spitz oder beide stumpf, und ist: AB‡DE und

BC‡FE, so ist

$\sqrt{}$ABC=$\sqrt{}$DEF.

Beweis. Man verlängere einen Schenkel des einen Winkels z. B. BC, bis die Verlängerung einen Schenkel des andern Winkels in O schneidet, was jedenfalls geschehen wird, weil BC die Gerade AB in B schneidet, und daher auch die mit AB parallele DE schneiden muß. Es ist nun (nach §. 78)

$\sqrt{}$ABO=$\sqrt{}$BOE und

$\sqrt{}$OEF=$\sqrt{}$BOE, folglich

$\sqrt{}$ABO=$\sqrt{}$OEF oder

$\sqrt{}$ABC=$\sqrt{}$DEF.

Von der Summe der Winkel in geradlinigen Figuren (Vielecken).

§. 83.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke beträgt die Summe der drei Winkel 180^0 oder 2R. So ist z. B. (Fig. 56) im $\triangle ABC$ $\surd x + \surd y + \surd z = 180^\circ = 2R$.

Beweis. Man ziehe durch den Scheitel z. B. B eines Winkels des Dreiecks zu der gegenüberstehenden Seite AC eine Parallele DE, so ist (nach §. 40)

$\surd n + \surd z + \surd m = 180^\circ = 2R$.

Nun ist aber (nach §. 78)

$\surd n = \surd x$ und $\surd m = \surd y$, folglich ist auch

$\surd x + \surd z + \surd y = 180^\circ = 2R$.

§. 84.

Zusatz. In einem Dreiecke kann nur ein Rechter vorkommen, weil, wenn auch nur zwei Rechte vorkämen, der dritte Winkel Null sein müßte. Um so weniger kann in einem Dreiecke mehr als ein stumpfer Winkel vorkommen. In solchem Falle ist jeder der beiden andern Winkel spitz.

§. 85.

Zusatz. In einem rechtwinkligen Dreiecke beträgt die Summe der beiden spitzen Winkel 90° oder R. Ist daher der eine spitze Winkel, der z. B. 58° betrage, bekannt, so ergiebt sich auch der andere, nämlich $90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$.

§. 86.

Zusatz. Sind zwei Winkel eines Dreiecks, oder ihre Summe bekannt, so kann der dritte gefunden werden, wenn man diese zwei von 180° oder 2R abzieht, da der Rest dem dritten gleich sein muß.

§. 87.

Zusatz. Sind zwei Winkel eines Dreiecks zweien Winkeln eines andern gleich, so ist auch der dritte des einen dem dritten des andern gleich.

§. 88.

Zusatz. In einem gleichseitigen Dreiecke beträgt jeder der drei gleichen Winkel den dritten Theil von 180° oder 2R, nämlich 60° oder $^2/_3$R.

§. 89.

Zusatz. Ist ein Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks bekannt, so sind es auch die beiden andern. Beträgt z. B. der Winkel an der Spitze 75°, so ist die Summe der beiden andern $180° - 75° = 105°$, also jeder einzelne $= {}^{105}/_{2}{}° = 52^1/_2{}°$. Ist einer der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie z. B. 81°, so ist die Summe beider 162°, also der Winkel an der Spitze $= 180° - 162° = 18°$.

§. 90.

Zusatz. Der äußere Winkel eines Dreiecks ist der Summe der zwei gegenüberliegenden inneren Winkel gleich. So ist z. B. (Fig. 57)

$$\surd m = \surd x + \surd y;$$ denn

$$\surd z + \surd m = 2R$$ und

$$\surd x + \surd y + \surd z = 2R,$$ folglich

$$\surd z + \surd m = \surd x + \surd y + \surd z,$$ daher

$$\surd m = \surd x + \surd y.$$

§. 91.

Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines jeden Vielecks beträgt zweimal so viele rechte Winkel, als die Figur Seiten oder Winkel hat, weniger vier Rechte.

Beweis. Man denke sich innerhalb des Vielecks einen Punkt und aus diesem in alle Winkel des Vielecks gerade Linien gezogen, so wird dasselbe dadurch in so viel Dreiecke getheilt, als es Seiten oder Winkel hat. Nun beträgt in jedem Dreiecke die Summe der Winkel zwei Rechte, folglich die Summe der Winkel in sämmtlichen Dreiecken zweimal so viel Rechte, als das Vieleck Seiten oder Winkel hat. Es sind aber die Winkel der vorkommenden Dreiecke, weniger die Winkel um den innerhalb der Figur angenommenen Punkt, allen Vieleckswinkeln zusammengenommen gleich, und die Winkel um den innerhalb angenommenen Punkt betragen (nach §. 40) vier Rechte; folglich beträgt die Summe aller Winkel eines Vielecks zweimal so viel Rechte, als dasselbe Seiten oder Winkel hat, weniger vier Rechte. So betragen z. B. die Winkel

a) eines Vierecks $=2.4R-4R=8R-4R=4R$,

b) eines Fünfecks $=2.5R-4R=10R-4R=6R$ u. s. w.

§. 92.

Zusatz. Da in einem regelmäßigen Vielecke die Winkel einander gleich sind, so wird der Winkel eines solchen Vielecks gefunden, wenn man die Summe sämmtlicher Winkel durch die Anzahl der Seiten oder der Winkel theilt. So beträgt z. B. der Winkel eines regelmäßigen Fünfzehnecks $={}^{26}/_{15}R=1{}^{11}/_{15}R=156°$.

§. 93.

Aufgabe. Es sind zwei Winkel O und P eines Dreiecks gegeben, man soll den dritten durch Zeichnung finden.

Auflösung und Beweis. Man ziehe eine Gerade von willkührlicher Länge z. B. CB (Fig. 58) und lege an den Endpunkt C zwei Winkel DCB und DCE, welche den zwei ge-

gebenen gleich sind, und verlängere einen der äußern Schenkel z. B. BC nach F, so ist ∠ECF der verlangte, weil mit diesem die zwei gegebenen Winkel zwei Rechte betragen; oder man lege an die Endpunkte A und B einer Geraden AB (Fig. 59) die gegebenen Winkel O und P und verlängere die Schenkel, bis sie sich in C schneiden, so ist ∠ACB (nach §. 87) der verlangte Winkel.

Von den Peripherie- und Mittelpunkt-Winkeln.

---

§. 94.

Lehrsatz. Jeder Mittelpunktwinkel ist doppelt so groß, als der Peripheriewinkel, welcher mit ihm auf einerlei oder gleichen Bogen steht.

Beweis.

1) Wenn ein Schenkel des Peripheriewinkels ein Durchmesser ist, wie Fig. 60, so ist (nach §. 90)
∠BOC=∠BAO+∠OBA und, da (nach §. 57)
∠BAO=∠OBA ist,
∠BOC=2∠BAO.

2) Wenn die Schenkel des Peripheriewinkels die Schenkel des Mittelpunktwinkels einschließen, wie Fig. 61, so ist wieder, wenn man durch A und O den Durchmesser AC zieht, ∠BOC=2∠BAO und ∠DOC=2∠DAO,
folglich ∠BOC+∠DOC=2∠BAO+2∠DAO, oder
∠BOD=2(∠BAO+∠DAO), oder
∠BOD=2∠BAD.

3) Wenn ein Schenkel des Peripheriewinkels einen Schenkel des Mittelpunktwinkels schneidet, wie Fig. 62, so ist, wenn man durch B und O den Durchmesser BC zieht,

nach 1) $\sqrt{}AOC=2\sqrt{}ABO$ und $\sqrt{}DOC=2\sqrt{}DBO$, folglich
$\sqrt{}AOC-\sqrt{}DOC=2\sqrt{}ABO-2\sqrt{}DBO$, oder
$\sqrt{}AOD=2(\sqrt{}ABO-\sqrt{}DBO)$, oder
$\sqrt{}AOD=2\sqrt{}ABD$.

4) Wenn die Winkel nicht auf einerlei, sondern nur auf gleichen Bogen stehen, wie Fig. 63, so ist, wenn man OF und OC zieht, $\sqrt{}FOC=\sqrt{}AOD$, weil Bog. FC=Bog. AD ist, und nach dem Vorhergehenden $\sqrt{}FOC=2\sqrt{}FBC$, daher auch $\sqrt{}AOD=2\sqrt{}FBC$.

§. 95.

Zusatz. Alle Peripheriewinkel, welche auf einerlei oder gleichen Bogen aufstehen, sind einander gleich, weil sie sämmtlich die Hälfte des nämlichen oder gleicher Mittelpunktwinkel sind. So ist z. B. (Fig. 64)

$$\sqrt{}ABF=\sqrt{}ACF=\sqrt{}ADF=\tfrac{1}{2}\sqrt{}AOF.$$

§. 96.

Zusatz. In gleichen Kreisen oder in dem nämlichen Kreise gehören zu gleichen Bogen gleiche Peripheriewinkel, und umgekehrt zu gleichen Peripheriewinkeln gleiche Bogen.

§. 97.

Zusatz. Parallele Sehnen AB, CD (Fig. 65) schneiden gleiche Bogen AC, BD ab. Zieht man nämlich BC, so ist (nach §. 78) $\sqrt{}ABC=\sqrt{}BCD$, daher Bog.AC=Bog.BD.

§. 98.

Zusatz. Jeder Peripheriewinkel im Halbkreise, d. i. jeder auf dem Halbkreise stehende Peripheriewinkel, z. B. $\sqrt{}BCD$ (Fig. 66) ist ein Rechter oder $=90°$; denn er ist die Hälfte seines Mittelpunktwinkels BOD, welcher als gerader Winkel zwei Rechte oder 180° beträgt.

Eine Anwendung dieses Satzes wird gemacht

1) zur Prüfung der Richtigkeit des sogenannten Winkelhackens, welcher aus zwei unter einem rechten Winkel

zusammen gefügten Linealen besteht. Man legt nämlich den Scheitel des Winkels an einen Punkt eines Halbkreises und sieht, ob die Schenkel, d. s. die Kanten der Lineale, durch die Endpunkte des gezogenen Durchmessers gehen. Trifft dieses ein, so ist das Instrument gut;

2) zur Errichtung einer Senkrechten im Endpunkte einer Geraden. Soll z. B. durch den Punkt B der Geraden AB (Fig. 67) eine Senkrechte gezogen werden, so beschreibt man aus einem willkührlichen Punkte C außerhalb AB mit CB einen Kreis, welcher AB in D schneidet, zieht den Durchmesser DCE und aus E die Gerade EB. Diese steht dann senkrecht auf AB, weil √EBA ein Peripheriewinkel im Halbkreise ist.

§. 99.

Zusatz. In jedem Vierecke, das in einem Kreise eingeschrieben ist, betragen immer zwei gegenüberstehende Winkel zusammengenommen zwei Rechte. So ist z. B. (Fig. 68)

√ABC+√ADC=2R, und

√DAB+√DCB=2R, weil ein jedes Paar der halben Summe zweier Mittelpunktwinkel gleich ist, welche 4R oder 360° betragen.

Von den Parallelogrammen.

§. 100.

Erklärung. Ein Viereck, in welchem jede zwei gegenüberstehenden Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm. Ein Viereck, in welchem nur zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind, heißt ein Trapez, und ein Viereck, in welchem keine Seite mit der andern parallel ist, heißt Trapezoid.

Ein Parallelogramm wird 1) *Quadrat* (regelmäßiges Viereck) genannt, wenn die Winkel und Seiten einander gleich sind, 2) *Rechteck*, wenn bloß die Winkel, jedoch nicht die Seiten, einander gleich sind, ferner 3) *Rhombus* oder Raute, wenn bloß die Seiten, jedoch nicht die Winkel, unter sich gleich sind, und 4) *Rhomboid*, wenn weder die Seiten noch die Winkel einander gleich sind.

§. 101.

Lehrsatz Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke getheilt. Ist z. B. ABCD (Fig. 69) ein Parallelogramm, oder ist

$$DC \# AB \text{ und } AD \# BC,$$

so wird, wenn die Diagonale DB gezogen wird,

$$\triangle ABD \cong \triangle DBC \text{ sein.}$$

Beweis. Es ist (nach §. 78) $\angle ADB = \angle DBC$ und $\angle ABD = \angle CDB$, ferner ist $DB = DB$, folglich (nach §. 49) $\triangle ADB \cong \triangle BDC$. Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt: $AB = DC$, $AD = BC$ und $\angle BAD = \angle DCB$.

Aus der Annahme folgt:

$$\angle ADB + \angle BDC = \angle DBC + \angle ABD, \text{ oder}$$

$$\angle ADC = \angle ABC.$$

§. 102.

Zusatz. In jedem Parallelogramm sind daher jedesmal die gegenüberstehenden Seiten und Winkel einander gleich.

§. 103.

Lehrsatz. In jedem Parallelogramm halbiren sich die Diagonalen gegenseitig. Ist z. B. (Fig. 70) ABCD ein Parallelogramm, so ist, wenn die Diagonalen AC und BD gezogen werden,

$$DO = BO \text{ und } CO = AO.$$

Beweis. Nach vorhergehendem §. ist DC=AB und (nach §. 78)

$\angle CDO = \angle ABO$, ferner $\angle DCO = \angle BAO$, folglich (nach §. 49)

$\triangle DOC \cong \triangle ABO$,

DO=BO und CO=AO.

§. 104.

Lehrsatz. Sind in einem Vierecke jedesmal die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, so sind diese auch parallel, oder das Viereck ist ein Parallelogramm. Ist z. B. (Fig. 71) AD=BC und AB=DC, so ist auch AD ǂ BC und AB ǂ DC.

Beweis. Man ziehe die Diagonale DB, so ist AD=BC, AB=DC und DB=DB, folglich (nach §. 47) $\triangle ABD \cong \triangle DCB$, daher $\angle ADB = \angle DBC$ und $\angle DBA = \angle CDB$, folglich (nach §. 79)

AD ǂ BC und AB ǂ DC.

§. 105.

Lehrsatz. Sind in einem Vierecke jedesmal die gegenüberstehenden Winkel gleich, so sind auch jede zwei gegenüberliegenden Seiten parallel, oder das Viereck ist ein Parallelogramm. Ist z. B. (Fig. 72)

$\angle x = \angle m$ und $\angle y = \angle n$, so ist auch

AD ǂ BC und AB ǂ DC.

Beweis. Es ist (nach §. 91)

$\angle m + \angle n + \angle x + \angle y = 4R$, oder

$\angle m + \angle n + \angle m + \angle n = 4R$, oder

$2\angle m + 2\angle n = 4R$, daher

$\angle m + \angle n = 2R$, folglich (nach §. 79)

AD ǂ BC. Ebenso wird bewiesen, daß AB ǂ DC ist.

§. 106.

Lehrsatz. Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so sind es auch die zwei andern, oder das Viereck ist ein Parallelogramm. Ist z. B. (Fig. 71) AD=und‡BC, so ist auch AB=und‡DC.

Beweis. Man ziehe die Diagonale DB, so ist (nach §. 78) ∠ADB=∠DBC, ferner ist AD=BC und DB=DB, folglich (nach §. 48) △ABD≅△BCD, daher

∠BDC=∠ABD und (nach §§. 79, 95)

AB = und ‡ DC.

§. 107.

Aufgabe. Es sind von einem Parallelogramm (Rhomboid) zwei Seiten M und N (Fig. 73) und eine Diagonale P gegeben; man soll damit das Parallelogramm errichten.

Auflösung und Beweis. Man ziehe eine Gerade AB=M, beschreibe aus A mit einem Halbmesser=N, und aus B mit einem Halbmesser=P zwei Kreisbogen, die einander in C schneiden und ziehe AC. Aus C beschreibe man nun mit AB und aus B mit AC zwei Kreisbogen, welche einander in D schneiden. Zieht man nun CD und BD, so ist ABCD das verlangte Parallelogramm, weil jede zwei gegenüberstehenden Seiten gleich, also auch parallel sind, und die beiden Dreiecke, in welche ABCD durch die Diagonale BC getheilt wird, mit den zwei Dreiecken kongruent sind, welche im Parallelogramm, das die Seiten M und N und die Diagonale P enthält, durch diese Diagonale gebildet werden.

§. 108.

Zusatz. Werden zwei Seiten M und N (Fig. 74), und der durch sie gebildete Winkel O eines Parallelogramms

gegeben, um dieses damit zu beschreiben, so zieht man wieder eine Gerade AB=M, legt dann an den Endpunkt A den gegebenen Winkel O, macht den Schenkel AC=N und beschreibt aus C mit AB und aus B mit AC zwei Kreisbogen, die sich in D schneiden. Zieht man ferner CD und BD, so ist gleichfalls ABCD das verlangte Parallelogramm.

§. 109.

Zusatz. Ist das verlangte Parallelogramm ein Rhombus, so braucht nur eine Seite und Diagonale, oder statt dieser ein anliegender Winkel gegeben zu sein.

Ist das Parallelogramm ein Rechteck, so müssen zwei Seiten, die einen rechten Winkel bilden, gegeben werden, oder eine Seite und Diagonale.

Ist endlich das Parallelogramm ein Quadrat, so braucht nur eine Seite, oder eine Diagonale bekannt zu sein.

Von der Tangente.

§. 110.

Lehrsatz. Jede auf dem Endpunkte des Halbmessers stehende Senkrechte ist eine Tangente des Kreises. Ist z. B. (Fig. 75) CB ⊥ OB, so ist CB eine Tangente.

Beweis. Man ziehe aus verschiedenen Punkten der Senkrechten CD an den Mittelpunkt O die Geraden FO, GO u. s. w., so sind alle (nach §. 66) größer als OB, mithin liegen alle Punkte der CB (nach §. 16), der einzige B ausgenommen, außerhalb der Peripherie.

§. 111.

Lehrsatz. Zieht man an den Berührungspunkt der Tangente einen Halbmesser, so steht dieser senk-

recht auf derselben. Wird z. B. (Fig. 75) der Halbmesser OB an den Berührungspnnkt B der Tangente CB gezogen, so ist OB ⊥ auf CB.

Beweis. Stände OB nicht senkrecht, sondern irgend eine andere Gerade z. B. OF, so wäre (nach §. 66) OF < OB, folglich läge der Punkt F innerhalb des Kreises, was gegen die Annahme ist.

§. 112.

Lehrsatz. Zieht man aus dem Mittelpunkte an die Tangente eine Senkrechte, so geht diese durch den Berührungspunkt.

Beweis. Zieht man (Fig. 75) den Halbmesser OB an den Berührungspunkt, so steht der Halbmesser nach vorhergehendem §. senkrecht auf der Tangente. Die aus dem Mittelpunkte an die Tangente gezogene Senkrechte kann daher keine andere Richtung nehmen, weil man sonst aus dem Punkte O an CB zwei Senkrechten ziehen könnte.

§. 113.

Lehrsatz. Die im Berührungspunkte der Tangente errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt.

Beweis. Zieht man wieder (Fig. 75) den Halbmesser OB an den Berührungspunkt B, so ist derselbe (nach §. 111) senkrecht. Die Senkrechte aus dem Berührungspunkte B kann daher keine andere Richtung nehmen, weil sonst in einem Punkte einer Geraden zwei Senkrechten errichtet werden könnten.

§. 114.

Aufgabe. Durch den Punkt C der Peripherie (Fig. 76) eine Tangente zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Man ziehe den Halbmesser

OC und errichte in C die Senkrechte CD, so ist diese (nach §. 110) die Tangente.

§. 115.

Aufgabe. Von einem Punkte A (Fig. 77) außerhalb eines Kreises eine Tangente an diesen zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Man verbinde den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte C des Kreises durch eine Gerade AC, beschreibe über AC den Halbkreis ABC oder ADC und ziehe AB oder AD, so sind diese Geraden Tangenten, weil (nach §. 98) AB mit CB, und AD mit CD einen Rechten bildet.

Die rechtwinkligen Dreiecke ACB und ACD sind kongruent, weil sie einerlei Hypotenuse AC und die gleichen Katheten CB und CD haben.

§. 116.

Aufgabe. Zwischen den Schenkeln eines Winkels z. B. LAF (Fig. 78) einen Kreis so zu beschreiben, daß die Schenkel des Winkels Tangenten werden.

Auflösung. Man halbire ∠LAF, ziehe aus einem Punkte C der Halbirungslinie die Geraden CB und CD senkrecht auf AL und AF, und beschreibe mit CB oder CD einen Kreis, so sind AB und AD Tangenten.

Beweis. ∠CAB=∠CAD, ∠CBA=∠CDA=R, folglich
∠BCA=∠ACD (nach §. 87), ferner
CA=CA, mithin (nach §. 49)
△ACB≅△ACD und CB=CD.

Der Kreis, der aus C mit der einen Geraden CB beschrieben wird, muß daher auch durch den Endpunkt der

andern Geraden CD gehen. Da ferner $AB \perp CB$, und $AD \perp CD$ ist, so sind AB und AD Tangenten des Kreises.

§. 117.

Aufgabe. Den Berührungspunkt einer Tangente zu finden.

Auflösung und Beweis. Man fällt aus dem Mittelpunkte auf die Tangente eine Senkrechte, so geht diese (nach §. 112) durch den Berührungspunkt.

§. 118.

Lehrsatz. Die Bogen, welche eine Tangente und eine zu ihr parallele Sehne abschneiden, sind einander gleich. Ist z. B. (Fig. 79) CD Tangente und $AB \parallel CD$, so ist Bog. AF = Bog. BF.

Beweis. Man ziehe AF und BF, ferner an den Berührungspunkt den Halbmesser OF, welcher (nach §. 111) $\perp$ auf CD und (nach §. 78) gleichfalls $\perp$ auf AB steht, Es ist aber (nach §. 74, Anmerkung) $AG = BG$, und $\angle AGF = \angle FGB = R$, ferner $GF = GF$, folglich (nach §. 48) $\triangle AFG \cong \triangle BFG$, und daher $\angle m = \angle n$, also (nach §. 96)

Bog. AF = Bog. BF.

§. 119.

Lehrsatz. Der Winkel, den eine Tangente mit einer Sehne bildet, ist dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Abschnitte gleich. Ist z. B. (Fig. 80) CD eine Tangente, so ist $\angle AFC = \angle AKF$.

Beweis. Man ziehe durch A eine Sehne $AB \parallel CD$, ferner BF, so ist $\angle AFC = \angle FAB$, und $\angle FAB$ nach vorhergehendem §. $= \angle ABF$, folglich auch $\angle AFC = \angle ABF$.

Da aber alle Peripheriewinkel auf einerlei Bogen einander gleich sind, so folgt $\angle AKF = \angle ABF$, daher auch $\angle AFC = \angle AKF$.

Von den Figuren im Kreise und um den Kreis.

§. 120.

Aufgabe. Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 81), die nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man verbinde die drei gegebenen Punkte durch die Geraden AB und BC, und errichte in der Mitte derselben die Senkrechten DO und FO. Der Kreis, den man aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte O der Senkrechten mit OB beschreibt, wird auch durch A und C gehen.

Beweis. Man ziehe OA, OB, OC und DF, so ist $\angle FDO + \angle DFO < 2R$; es müssen daher OD und OF in irgend einem Punkte sich schneiden. Nach §. 65 ist $OA = OB = OC$, folglich muß der aus O mit OB beschriebene Kreis auch durch A und C gehen.

§. 121.

Zusatz. Haben die Peripherien zweier Kreise drei Punkte gemein, so fallen sie in einander und bilden nur einen einzigen Kreis.

§. 122.

Zusatz. Soll der Mittelpunkt eines Kreises oder eines Bogens gefunden werden, so errichte man aus der Mitte zweier an einander liegenden Sehnen senkrechte Linien; der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt dieser ist der gesuchte Mittelpunkt.

§. 123.

Zusatz. Man kann nach obiger Auflösung um jedes Dreieck einen Kreis beschreiben, da die Durchschnittspunkte

der Seiten als drei gegebene, nicht in gerader Linie liegende Punkte zu betrachten sind.

§. 124.

Aufgabe. In ein Dreieck ABC (Fig. 82) einen Kreis einzuschreiben.

Auflösung. Man halbire zwei beliebige Winkel ABC und ACB, und fälle vom Durchschnittspunkte der Halbirungslinien auf die Seiten des Dreiecks die Senkrechten OD, OF, OG, so wird ein Kreis aus O mit OF die drei Seiten des Dreiecks berühren und daher in das Dreieck eingeschrieben sein.

Beweis. Es ist $\sqrt{}ABC + \sqrt{}ACB < 2R$, und um so mehr $\frac{1}{2}\sqrt{}ABC + \frac{1}{2}\sqrt{}ACB < 2R$ oder $\sqrt{}OBC + OCB < 2R$; es müssen sich daher die Halbirungslinien BO und CO in einem Punkte schneiden. Nun ist

$\sqrt{}OBD = \sqrt{}OBF$,

$\sqrt{}ODB = \sqrt{}OFB = R$, daher auch

$\sqrt{}DOB = \sqrt{}BOF$, da ferner

$BO = BO$, so ist

$\triangle BOD \cong \triangle BOF$, daher $DO = OF$.

Auf dieselbe Weise wird bewiesen, daß $OF = OG$, daher muß der Kreis, aus O mit $OF = OD = OG$ beschrieben, durch F, D und G gehen. Da nun die Seiten des Dreiecks auf den Endpunkten der Halbmesser OF, OG, OD senkrecht stehen, so sind dieselben Tangenten des Kreises; folglich ist dieser in das Dreieck eingeschrieben.

§. 125.

Aufgabe. In und um jedes regelmäßige Vieleck wie ABCDEF (Fig. 83) einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man beschreibe (nach §. 120) durch drei

auf einander folgende Scheitelpunkte z. B. A, B und C einen Kreis, so wird dieser durch alle übrigen Scheitelpunkte gehen, und daher um das Vieleck beschrieben sein. Errichtet man aus dem Mittelpunkte O des so beschriebenen Kreises eine Senkrechte OG auf eine Seite AB des Vielecks, und beschreibt mit OG einen Kreis, so wird dieser alle Seiten des Vielecks berühren, daher in dasselbe beschrieben sein.

Beweis. Da AO=CO und BO=BO, ferner AB=BC, so sind die gleichschenkligen Dreiecke ABO und BOC kongruent, und ∠OCB=∠OBC=∠OBA=½∠ABC=½∠BCD=∠DCO.

Ferner ist BC=CD und CO=CO, es ist daher

△BOC≅△COD, daher DO=BO=CO=AO.

Auf dieselbe Weise läßt sich beweisen, daß EO=DO=CO ꝛc. ist, folglich muß der Kreis aus O mit OA durch alle Scheitelpunkte gehen, und ist daher um das Vieleck beschrieben. Hieraus geht hervor, daß, wenn von dem Mittelpunkte eines um ein regelmäßiges Vieleck beschriebenen Kreises nach allen Ecken Halbmesser gezogen werden, dasselbe in so viel kongruente gleichschenklige Dreiecke getheilt wird, als das Vieleck Seiten hat, und daß jeder Umfangswinkel desselben halbirt wird.

Da nun alle Dreiecke, wie AOB, BOC, COD u. s. w. kongruent und gleichschenklig sind, so müssen alle Senkrechten aus O, wie OG, OL u. s. w., welche man auf die Grundlinien dieser Dreiecke zieht, gleich sein; mithin wird der Kreis aus O mit dem Halbmesser OG alle Seiten des Vielecks berühren, und daher in dasselbe beschrieben sein.

§. 126.

Zusatz. Der Mittelpunkt eines in und um ein regelmäßiges Vieleck beschriebenen Kreises kann auch als Mittelpunkt des Vielecks betrachtet werden; derselbe ist nicht allein von allen Ecken, sondern auch von allen Seiten des Vielecks, gleich weit entfernt. Man nennt auch alle Winkel wie AOB

BOC u. s. w. Mittelpunktwinkel des Vielecks; diese sind unter sich gleich, wie vorher gezeigt wurde, und da ihre Summe 360° oder 4R beträgt, so wird die Größe eines jeden erhalten, wenn man 360° oder 4R durch die Anzahl der Seiten dividirt.

§. 127.

Zusatz. Durch jedes eingeschriebene regelmäßige Vieleck wird die Peripherie des umschriebenen Kreises in so viel gleiche Theile getheilt, als das Vieleck Seiten hat, weil die gleichen Seiten als gleiche Sehnen zu betrachten sind. Soll nun ein regelmäßiges Vieleck in einen Kreis eingeschrieben werden, so muß man die Peripherie in so viel gleiche Theile theilen, als die Figur Seiten haben soll, und die Theilungspunkte durch Geraden verbinden. Hierdurch entsteht ein Vieleck, welches gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, weil die Seiten nichts anders, als die zu den gleichen Bogen gehörigen Sehnen, und die Winkel der Figur nichts anders als Peripheriewinkel sind, welche auf gleichen Bogen stehen.

§. 128.

Aufgabe. Ein regelmäßiges Vieleck um einen Kreis zu beschreiben, wenn die Peripherie desselben in so viel gleiche Theile getheilt ist, als das Vieleck Seiten haben soll.

Auflösung. Es sei (Fig. 84) die Peripherie des Kreises um O in den Punkten B, C, D, E, F, G in so viel gleiche Theile getheilt, als das Vieleck Seiten haben soll. Man ziehe durch alle Theilungspunkte Tangenten, so ist KLMNRS das verlangte Vieleck.

Beweis. Man ziehe die Sehnen BC, CD, DE u. s. w. und zu allen Theilungspunkten B, C, D u. s. w. die Halbmesser OB, OC, OD u. s. w., welche (nach §. 111) senkrecht auf den Tangenten stehen. Es ist nun $\angle OBL + \angle OCL = 2R$,

und $\surd CBL + \surd BCL < 2R$, daher schneiden sich die Tangenten KL und ML. Eben so wird bewiesen, daß auch die anderen Tangenten sich schneiden. Man erhält sonach eine um den Kreis beschriebene Figur von so viel Seiten, als Theilungspunkte gegeben sind. Es sind die Winkel CBL, BCL, DCM, CDM u. s. w., welche die Tangenten mit den Sehnen bilden, gleich, da sie sämmtlich Peripheriewinkeln, welche auf den gleichen Bogen BC, CD u. s. w. stehen, (nach §. 119) gleich, diese Peripheriewinkel aber unter sich (nach §. 95) gleich sind. Es sind daher (nach §. 58) alle die Dreiecke LBC, MCD, NDE u. s. w. gleichschenklig, und, da die Sehnen BC, CD, DE u. s. w., als zu gleichen Bogen gehörend, gleich sind, so sind diese gleichschenkligen Dreiecke kongruent, und daher $\surd BLC = \surd CMD = \surd DNE$ u. s. w., und

$$BL = CL = MD = CM = DN = EN \text{ u. s. w.},$$

folglich auch $CL + CM = DM + DN = EN + ER$ u. s. w. oder

$$LM = MN = NR \text{ u. s. w.}$$

Da nun in diesem um den Kreis beschriebenen Vieleck alle Winkel und alle Seiten gleich sind, so ist es regelmäßig.

§. 129.

Aufgabe. In und um einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Viereck, Achteck u. s. w. zu beschreiben.

Auflösung und Beweis. Man ziehe zwei Durchmesser AB, CD (Fig. 85) senkrecht zu einander, so wird dadurch die Peripherie in vier gleiche Theile getheilt. Verbindet man nun die Theilungspunkte durch Sehnen, so erhält man das verlangte regelmäßige Viereck (nach §. 127). Halbirt man jeden dieser vier Kreisbogen und verbindet die Theilungspunkte durch Sehnen, so erhält man ein in den Kreis eingeschriebenes regelmäßiges Achteck, und durch fort-

gesetztes Halbiren ein regelmäßiges Sechzehneck, Zweiunddreißigeck u. s. w.

Zieht man durch jeden Theilungspunkt der vier, acht, sechzehn u. s. w. gleichen Bogen Tangenten, so erhält man nach vorhergehendem §. ein um den Kreis beschriebenes regelmäßiges Vier-, Acht-, Sechzehneck u. s. w.

§. 130.

Aufgabe. In und um einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Sechseck, Dreieck, Zwölfeck u. s. w. zu beschreiben.

Auflösung und Beweis. Es sei (Fig. 86) ABCDEF das verlangte eingeschriebene Sechseck, so ist der Mittelpunktwinkel $AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Da aber $OA = BO$, so ist

$$\angle OAB = \angle OBA.$$

Es ist nun $\angle OAB + \angle OBA = 180^\circ - \angle AOB$, oder

$\angle OAB + \angle OAB = 180^\circ - 60^\circ$, oder

$2\angle OAB = 120^\circ$, folglich $\angle OAB = 60^\circ$ und

$\angle OBA = 60^\circ$. Es ist daher

$\angle OAB = \angle OBA = \angle AOB$, folglich ist

$AB = OA = OB$, und die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes ist dem Halbmesser gleich. Ein regelmäßiges Sechseck wird daher in den Kreis eingeschrieben, wenn man den Halbmesser sechsmal an der Peripherie herumträgt.

Zieht man die Geraden AC, CE, EA, so erhält man ein in den Kreis eingeschriebenes regelmäßiges Dreieck.

Halbirt man jeden Bogen, welcher eine Seite des regelmäßigen Sechseckes einschließt, und zieht durch die Theilungspunkte Sehnen, so erhält man ein eingeschriebenes regelmäßiges Zwölfeck, und durch Wiederholung dieses Verfahrens ein eingeschriebenes regelmäßiges Vierundzwanzigeck u. s. w.

Zieht man ferner durch jeden Theilungspunkt der drei, sechs, zwölf u. s. w. gleichen Bogen Tangenten, so erhält man ein um den Kreis beschriebenes regelmäßiges Dreieck, Sechseck, Zwölfeck u. s. w.

§. 131.

Aufgabe. Ueber einer gegebenen Geraden AB (Fig. 87) ein regelmäßiges Achteck zu errichten.

Auflösung. Man errichte über AB das Quadrat ABCD, und beschreibe um dasselbe einen Kreis (nach §. 125). Fällt man nun aus O eine Senkrechte auf AB, verlängert sie über O hinaus, bis sie den Kreis in F schneidet, und beschreibt aus F mit dem Halbmesser FA oder FB einen Kreis, so kann AB achtmal an der Peripherie desselben herumgelegt werden.

Beweis. Da AG=BG (nach §. 74 Anmerk.) ist, mithin FG in der Mitte von AB senkrecht steht, so ist (nach §. 65) AF=BF. Der Kreis aus F, mit FA beschrieben, geht daher auch durch B. Es ist aber

$$\angle AFB = \frac{1}{2} \angle AOB \text{ (nach §. 94) und}$$

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ; \text{ daher } \angle AFB = 45^\circ.$$

Es enthält mithin Bogen AB 45° oder $\frac{1}{8}$ Peripherie des mit FA beschriebenen Kreises.

Die zum Bogen AB gehörige Sehne kann also achtmal an der Peripherie aufgetragen werden.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann AB die Seite eines regelmäßigen Sechzehnecks, Zweiunddreißigecks u. s. w. werden.

§. 132.

Aufgabe. Ueber einer gegebenen Geraden AB (Fig. 88) ein regelmäßiges Zwölfeck zu errichten.

Auflösung. Man errichte über AB das gleichseitige Dreieck ABO und beschreibe aus O mit OA oder OB einen Kreis. Fällt man nun aus dem Mittelpunkt O eine Senkrechte auf AB, verlängert diese, bis sie die Peripherie in D trifft, beschreibt mit DA oder DB einen Kreis, so kann AB zwölfmal an der Peripherie desselben aufgetragen werden.

Beweis. AC=CB (nach §. 74, Anmerk.) und DA=DB, weil DC in der Mitte von AB senkrecht steht. Der Kreis aus D, mit DA beschrieben, geht daher auch durch B. Es ist aber $\angle AOB = 60^\circ$ (nach §. 88);

$\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ$; folglich enthält Bogen AB 30° oder $\frac{1}{12}$ Peripherie des mit DA beschriebenen Kreises. Es kann daher die zugehörige Sehne AB zwölfmal an der Peripherie aufgetragen werden.

§. 133.

Aufgabe. Da die Peripherie eines Kreises geometrisch nicht in jede mögliche Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann, so folge hier die Aufgabe, durch technische Construktion ein regelmäßiges Vieleck von beliebiger Seitenzahl z. B. ein regelmäßiges Zehneck in und um einen gegebenen Kreis zu beschreiben.

Auflösung und Beweis. Man ziehe (Fig. 89) den Halbmesser OB und lege mittels des Transporteurs an den Punkt O des Halbmessers OB (nach §. 126) den Mittelpunktwinkel des verlangten regelmäßigen Vielecks, nämlich $\angle BOC = {}^{360}/_{10}{}^\circ = 36^\circ$. Es enthält nun Bogen BC 36° oder $\frac{1}{10}$ Peripherie, und die zu Bogen BC gehörige Sehne ist daher die Seite der verlangten Vielecks. Dieses wird (nach §. 127) errichtet, wenn man die Sehne BC zehnmal an der Peripherie aufträgt.

Ist nun der Kreisumfang in zehn gleiche Theile getheilt,

so erhält man das regelmäßige Vieleck von eben so viel Seiten um den Kreis, wenn man durch alle Theilungspunkte der gleichen Bogen (nach §. 128) Tangenten zieht.

§. 134.

Aufgabe. Ueber einer gegebenen Geraden AB (Fig. 90) ein regelmäßiges Vieleck z. B. von 12 Seiten durch technisches Verfahren zu errichten.

Auflösung und Beweis. Man lege an jeden Endpunkt der gegebenen Geraden AB (nach §. 92) mittels des Transporteurs den halben Umfangswinkel des Vielecks, nämlich $\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2} \cdot \frac{20R}{12} = \frac{5}{6}R = 75^\circ$. Verlängert man die Schenkel dieser gleichen Winkel, so entsteht das gleichschenklige $\triangle AOB$. Beschreibt man nun aus O mit dem Halbmesser OA oder OB einen Kreis, so kann AB zwölfmal an der Peripherie desselben aufgetragen werden; denn

$$\angle AOB = 180^\circ - (\angle OAB + \angle OBA) = 180^\circ - 2\angle OAB = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

Es enthält daher Bogen AB 30° oder $\frac{1}{12}$ Peripherie des mit OB beschriebenen Kreises. Die zu Bogen AB gehörige Sehne, welche auch die Seite des verlangten Vielecks ist, kann daher zwölfmal an der Peripherie aufgetragen werden.

Von den gleich großen Figuren.

---

§. 135.

Erklärung. Figuren heißen gleich groß, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben. Gleich große Figuren brauchen nicht kongruent zu sein, sondern können auch ganz ungleiche

Begrenzung und Form (Gestalt) haben. Es kann z. B. ein Fünfeck gleich groß sein, wie ein Dreieck oder Quadrat.

§. 136.

Erklärung. Grundlinie nennt man beim Parallelogramm eben so, wie beim Dreieck, jene Seite, über welcher man die Figur errichtet denkt. Der Scheitelpunkt desjenigen Winkels im Dreiecke, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, heißt Spitze. Höhe des Parallelogramms heißt die Senkrechte zwischen der Grundlinie und der gegenüberstehenden Parallelen; Höhe des Dreiecks heißt die Senkrechte von der Spitze auf die Grundlinie.

§. 137.

Zusatz. Da alle zwischen zwei Parallelen gezogenen Senkrechten (nach §. 75) einander gleich sind, so haben Dreiecke und Parallelogramme, welche zwischen einerlei Parallelen liegen, gleiche Höhe, wenn man diese Figuren über einer der Parallelen errichtet denkt.

§. 138.

Lehrsatz. Parallelogramme mit einerlei oder gleichen Grundlinien und gleicher Höhe, oder zwischen einerlei Parallelen sind gleich groß.

Beweis. Es sind vier Fälle möglich; 1) eine Seite AE des einen Parallelogramms kann eine Diagonale des andern sein, wie Fig. 91, oder 2) eine Seite BC des andern schneiden, wie Fig. 92, oder 3) zwischen den Seiten AD und BC des andern liegen, wie Fig. 93, oder 4) beide Parallelogramme haben nur gleiche, aber nicht einerlei Grundlinien, wie Fig. 94. In den drei ersten Fällen ist AD=BC, AE=BF und

$\angle DAE = \angle CBF$ (nach §. 82),

folglich $\triangle AED \cong \triangle CBF$, und

$ABFD - \triangle CBF = ABFD - \triangle ADE$,

oder $ABCD = ABFE$.

Im vierten Falle geht der Beweis aus einem der drei genannten hervor, wenn man (Fig. 94) das Parallelogramm HGFE so auf ABCD gelegt denkt, daß die gleichen Grundlinien HG und AB auf einander zu liegen kommen.

§. 139.

Zusatz. Ein Rhomboid oder ein Rhombus ist gleich groß, wie ein Rechteck von gleicher Höhe und Grundlinie.

§. 140.

Zusatz. Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Höhe und Grundlinie. So ist z. B. $\triangle ABC = \frac{1}{2} HGFE$ (Fig. 94). Ergänzt man nämlich das Dreieck zu dem Parallelogramm ABCD, so ist

$$ABCD = HGFE \text{ (nach §. 137), daher auch}$$
$$\tfrac{1}{2} ABCD = \tfrac{1}{2} HGFE, \text{ oder } \triangle ABC = \tfrac{1}{2} HGFE.$$

§. 141.

Zusatz. Dreiecke von gleicher Höhe und Grundlinie sind gleich groß, weil sie die Hälften von gleichen Parallelogrammen sind.

§. 142.

Hieraus folgt die Richtigkeit der Auflösung folgender Aufgaben, welche auch unter dem Namen „Verwandlung der Figuren in einander" begriffen werden.

1) Ein Rhomboid ABCD (Fig. 95) wird in ein gleich großes Rechteck verwandelt, wenn man in A die Senkrechte AE gleich der Höhe des Rhomboids errichtet und durch E mit AB die Parallele EF, und durch B mit AE die Parallele BF zieht.

2) Ein Parallelogramm ABCD (Fig. 96) wird in ein anderes gleich großes mit gegebenem Winkel O über gleicher Grundlinie dadurch verwandelt, daß man an den Endpunkt der Grundlinie AB den Winkel O legt, dessen

Schenkel verlängert, bis er die gegenüberstehende Parallele oder deren Verlängerung in E schneidet, und durch B mit AE die Parallele BF zieht.

3) Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 97) wird in ein gleich großes gleichschenkliges verwandelt, wenn man durch C eine Parallele zu AB zieht, in der Mitte D der Grundlinie AB eine Senkrechte errichtet, diese verlängert, bis sie die Parallele in E schneidet, und alsdann EA und EB zieht. Es ist △ABE das verlangte Dreieck.

4) Aehnlich wird ein spitzwinkliges Dreieck in ein rechtwinkliges, ferner ein gegebenes Dreieck in ein anderes gleich großes mit gegebenem Winkel verwandelt.

5) Ein Dreieck ABC (Fig. 98) wird in ein gleich großes Parallelogramm verwandelt, wenn man durch C eine Parallele zu AB und durch die Mitte D der Grundlinie eine Parallele zu AC zieht, alsdann diese verlängert bis E. Es ist △ABC=ADEC.

6) Sollen mehre Dreiecke von gleicher Höhe in ein einziges, das sämmtlichen gegebenen an Flächeninhalt gleich kömmt, verwandelt werden, so zieht man eine Gerade, trägt auf diese die Grundlinien der Dreiecke auf, und errichtet in ihr eine der gemeinschaftlichen Höhe der Dreiecke gleiche Senkrechte. Zieht man nun von den Endpunkten der Grundlinie an den Endpunkt der Senkrechten gerade Linien, so erhält man das verlangte Dreieck.

Durch ähnliches Verfahren werden mehre Parallelogramme von gleicher Höhe in ein einziges diesen gleich großes verwandelt.

7) Ein gegebenes Parallelogramm ABCD (Fig. 99) wird in ein gleich großes Dreieck verwandelt, wenn man

die Grundlinie so weit verlängert, daß BE=AB wird, und DE zieht. Es ist alsdann ABCD=△ADE.

8) Ein Trapez ABCD (Fig 100) wird in ein gleich großes Dreieck verwandelt, wenn man die eine Parallele AB verlängert, bis BF=DC wird, und AC und FC zieht. △ACF ist alsdann das verlangte. Die Dreiecke BCF und ADC sind nämlich zwischen einerlei Parallelen AF und DC errichtet, und haben daher gleiche Höhe; ferner haben sie gleiche Grundlinien. Es ist daher

△BCF=△ADC. Nun ist
△ACF=△ABC+△BCF, oder
△ACF=△ABC+△ADC, oder
△ACF=ABCD.

9) Jedes geradlinige Vieleck z. B. ABCDE (Fig. 101) wird in ein, dem Flächeninhalte nach, gleich großes Dreieck durch folgendes Verfahren verwandelt. Man zieht eine Diagonale DA und setzt statt △AED ein anderes gleich großes an die Figur, von welchem eine Seite die Verlängerung einer Seite der Figur ist. Um dieses Dreieck zu erhalten, zieht man durch E eine Parallele zu DA, verlängert die Seite AB, bis sie die Parallele in F schneidet und zieht FD, so wird △AFD=△AED (nach §. 141). Es ist daher BCDF=ABCDE. BCDF hat aber ein Eck weniger, als ABCDE. Zieht man ferner die Diagonale DB und wiederholt das angegebene Verfahren, so erhält man eine neue Figur, welche der vorigen durch Verwandlung erhaltenen gleich ist, aber ein Eck weniger hat. Auf diese Weise erhält man daher endlich das △FDG, welches mit der gegebenen Figur gleichen Flächeninhalt hat.

Hat das zu verwandelnde Vieleck einwärts gehende oder einspringende Winkel, wie ABCDEF (Fig. 102),

so muß man solche Winkel zuerst entfernen. Dies geschieht dadurch, daß man die Scheitelpunkte der auswärtsgehenden Winkel, zwischen denen ein einspringender liegt, durch Geraden DB und EA verbindet, durch C mit DB die Parallele CG, durch F mit EA die Parallele FH zieht, ferner die Geraden AH und BG. So wird ABGH=ABCDEF, weil △CGB=△CGD und △FHA=△FHE ist.

Die Figur ABGH kann nun nach dem vorigen Verfahren in ein gleich großes Dreieck verwandelt werden.

10) Jedes regelmäßige Vieleck kann nach §. 125 durch die an die Ecke gezogenen Halbmesser des umschriebenen Kreises in eben so viel kongruente Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat, getheilt werden. Verwandelt man alle diese Dreiecke nach 6) in ein einziges, so ergiebt sich hieraus, daß ein regelmäßiges Vieleck dem Flächeninhalte nach einem Dreiecke gleich ist, dessen Grundseite dem Umfange des Vielecks, und dessen Höhe dem Abstande des Mittelpunkts des Vielecks von einer seiner Seiten gleich kömmt. S. Fig. 103.

11) Ein Kreis kann als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachtet werden. Es ist daher die Kreisfläche selbst einem Dreiecke gleich, welches die Länge der Peripherie zur Grundseite und den Halbmesser zur Höhe hat.

Vom Pythagoräischen Lehrsatze und dessen Anwendung.

---

§. 143.

Lehrsatz (von seinem Erfinder Pythagoras —

der Pythagoräische genannt). Im rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe beider Quadrate der Katheten gleich. Es ist (Fig. 104)

$$ABED = BCFG + ACHK\text{, oder}$$
$$AB^2 = BC^2 + AC^2.$$

Beweis. Man ziehe $CM \parallel BE$, und verbinde C und E, A und G durch Geraden, so ist

$$\angle ABE = \angle CBG = R\text{, also auch}$$
$$\angle ABE + \angle ABC = \angle CBG + \angle ABC\text{, oder}$$
$$\angle CBE = \angle ABG\text{, da ferner}$$
$$BE = AB \text{ und } BC = BG\text{, so folgt}$$
$$\triangle CBE \cong \triangle ABG.$$

Es hat aber $\triangle CBE$ mit dem Rechtecke LBEM gleiche Höhe und Grundlinie, eben so $\triangle ABG$ mit BCFG, folglich ist (nach §. 140) $\triangle CBE = \frac{1}{2} LBEM$ und $\triangle ABG = \frac{1}{2} BCFG$.

Da aber $\triangle CBE = \triangle ABG$ ist, so folgt

$$\tfrac{1}{2} LBEM = \tfrac{1}{2} BCFG\text{, oder}$$
$$LBEM = BCFG = BC^2.$$

Eben so wird bewiesen, daß

$$ALMD = ACHK = AC^2 \text{ ist, folglich}$$
$$LBEM + ALMD = BCFG + ACHK\text{, oder}$$
$$AB^2 = BC^2 + AC^2.$$

Hieraus folgt, wenn man auf beiden Seiten entweder AC^2 oder BC^2 abzieht:

$$BC^2 = AB^2 - AC^2\text{, und}$$
$$AC^2 = AB^2 - BC^2\text{,}$$

d. h. das Quadrat der einen Kathete ist gleich der Differenz zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und dem Quadrate der andern Kathete.

§. 144.

Aufgabe. Ein Quadrat zu errichten, welches der Summe zweier gegebenen Quadrate gleich ist.

Auflösung und Beweis. Man macht ein rechtwinkliges Dreieck, worin die beiden Katheten den Seiten der gegebenen Quadrate gleich sind. Es wird sonach das Quadrat über der Hypotenuse der Summe der gegebenen Quadrate gleich.

§. 145.

Zusatz. Man kann daher ein Quadrat finden, welches der Summe einer jeden Anzahl von Quadraten gleich ist, wenn man zuerst zwei in eines, sodann dieses mit einem dritten in ein Quadrat, das im Flächeninhalte jenen gleich ist, u. s. f. verwandelt, bis alle gegebenen Quadrate in ein einziges, dem Flächeninhalte nach gleich großes verwandelt sind. Es seien z. B. (Fig. 105) M, N, O die Seiten dreier Quadrate, welche in ein einziges verwandelt werden sollen. Man mache nun AB=M, und errichte im Endpunkte A dieser Geraden eine mit der Seite N gleich lange Senkrechte AC und ziehe BC, so ist

$$BC^2 = AB^2 + AC^2, \text{ oder}$$
$$BC^2 = M^2 + N^2.$$

Nun errichte man im Endpunkte B der Geraden BC wieder eine Senkrechte BD, mache sie so lange wie O und ziehe CD, so ist

$$CD^2 = BC^2 + BD^2, \text{ oder}$$
$$CD^2 = AB^2 + AC^2 + BD^2, \text{ oder}$$
$$AD^2 = M^2 + N^2 + O^2.$$

Es ist also AD die Seite des gesuchten Quadrats.

Hieraus folgt leicht die Auflösung der Aufgabe: Ein Quadrat zu machen, das zwei-, drei-, vier-, fünf u. s. w. mal so groß ist, wie ein gegebenes.

§. 146.

Aufgabe. Ein Quadrat zu machen, welches dem Unterschiede zweier Quadrate, deren Seiten M,

die größere, und N, die kleinere (Fig. 106) gegeben sind, gleich kömmt.

Auflösung. Man mache AB=N, der kleineren Seite, und errichte in B eine Senkrechte von unbestimmter Länge. Aus A, als Mittelpunkte, beschreibe man alsdann mit einem Halbmesser, der gleich der größeren Seite M ist, einen Kreisbogen, der die Senkrechte in C schneidet, und ziehe AC, so ist BC die Seite des verlangten Quadrats. Es ist nämlich

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ folglich}$$
$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = M^2 - N^2.$$

§. 147.

Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, welches die Hälfte eines gegebenen ABCD (Fig. 107) ist.

Auflösung und Beweis. Man ziehe die Diagonalen AC, BD, so entstehen vier kongruente gleichschenklige Dreiecke, weil sich die gleich großen Diagonalen gegenseitig halbiren und die Seiten des Quadrats einander gleich sind. Es ist daher jedes der Dreiecke der vierte Theil des Quadrats. Die unter sich gleichen Winkel um O betragen zusammen 4R; es kömmt daher auf jeden einzelnen 1R, und (nach §. 89) auf einen Winkel an der Grundseite $\frac{1}{2}$R. Legt man nun ein solches Dreieck z. B. BOC auswärts nach F, so entsteht ein Quadrat OBCF, weil die Seiten und Winkel einander gleich sind. Da aber die zwei Dreiecke, in welche dieses Quadrat getheilt werden kann, zusammen dem halben Quadrat ABCD an Flächeninhalt gleich sind, so ist auch OBFC = $\frac{1}{2}$ABCD, und daher das verlangte Quadrat.

Legt man alle vier Dreiecke nach außen, so entsteht ein Quadrat, dessen Flächeninhalt noch einmal so groß ist, als der des gegebenen.

§. 148.

Lehrsatz (der Pythagoräische Lehrsatz umgekehrt). Ein Dreieck, in welchem das Quadrat einer Seite der Summe der Quadrate der zwei anderen Seiten gleich kömmt, ist rechtwinklig. Ist z. B. (Fig. 108)

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, so ist $\angle BAC = R$.

Beweis. Man errichte auf AB in A eine Senkrechte

$AD = AC$, so ist

$BD^2 = AB^2 + AD^2$, oder

$BD^2 = AB^2 + AC^2$. Es ist aber auch

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, folglich

$BC^2 = BD^2$, daher $BC = BD$.

Da aber nun $BA = BA$ und $AC = AD$, so ist

$\triangle ABC \cong \triangle BAD$ und

$\angle BAC = \angle BAD = R$.

Anmerkung. Soll auf dem Felde durch einen Punkt einer abgesteckten Geraden eine Senkrechte gezogen werden, so nimmt man drei Abtheilungen einer Meßkette oder Schnur von solcher Länge, daß das Quadrat der einen Abtheilung der Summe der Quadrate der beiden andern gleich ist, was leicht geschehen kann, wenn man z. B. fünf gleiche Theile (etwa Fuße) auf der Kette bezeichnet, und dieselben zur ersten Abtheilung, dann vier solche Theile zur zweiten und endlich noch drei zur dritten Abtheilung macht. Verbindet man diese Abtheilungen zu einem Dreiecke, so wird dasselbe rechtwinklig: denn

$5^2 = 4^2 + 3^2$, oder

$25 = 16 + 9$.

Legt man nun die eine Kathete dieses so gebildeten Dreiecks längs der abgesteckten Linie so an, daß der Scheitel des rechten Winkels an dem gegebenen Punkte, worin die

Senkrechte errichtet werden soll, zu liegen kömmt, so giebt die andere Kathete die Richtung der Senkrechten an.

Von der Ausmessung oder Berechnung des Flächeninhalts ebener Figuren.

§. 149.

Erklärung. Figuren ausmessen oder nach ihrem Inhalte berechnen, heißt angeben, wie oft in denselben irgend eine (als Einheit angenommene) gleichartige Größe, also wieder eine Figur, enthalten ist. Als gleichartige Größe nimmt man immer ein Quadrat an, welches, je nachdem eine Seite einen Zoll, einen Fuß, eine Ruthe u. s. w. lang ist, Quadratzoll, Quadratfuß, Quadratruthe u. s. w. heißt, und bezeichnet dieses, der Kürze wegen, mit □'', □', □° u. s. f.

Kann auf einer Ebene z. B. der eines Zimmerbodens der Quadratfuß 250 mal umhergelegt werden, so folgt, daß der Flächeninhalt 250 Quadratfuß enthält. Aber das Umherlegen eines Quadrats ist nicht nur beschwerlich, sondern auch in den meisten Fällen unmöglich, wie bei Seen, Aeckern, die mit Gebüschen versehen sind, u. a. m. Die Geometrie lehrt nun, wie Figuren nach ihrem Flächeninhalte schon dadurch bestimmt werden können, daß man ihre Ausdehnungen nach Länge und Breite mit dem Längenmaße mißt.

§. 150.

Lehrsatz. Wenn die Seite ab des Quadrats abcd (Fig. 109) in der Seite AB des Rechtecks ABCD mmal und in der Seite AD nmal enthalten ist, so ist das Quadrat abcd in dem Rechtecke ABCD m.nmal

enthalten, oder ABCD ist m.n solchen Quadraten, wie abcd, gleich.

Beweis. Wenn ab in AB mmal enthalten ist, so läßt sich das Quadrat abcd längs AB mmal neben einander legen, wodurch das Rechteck ABFG=m.Quadrat abcd entsteht.

Ist aber ab=ad=AG in der Seite AD nmal enthalten, so läßt sich das Rechteck ABFG nmal längs AD neben einander legen; mithin ist ABCD=n.ABFG=n.m.Quadrat abcd.

§. 151.

Zusatz. Um daher den Flächeninhalt eines Rechtecks zu finden, mißt man zwei anliegende Seiten (Grundlinie und Höhe) mit gleichem Maße, und multiplizirt die Zahlen, die sich ergeben, mit einander. Das Produkt hiervon giebt die Anzahl der Quadrate des Rechtecks an.

§. 152.

Zusatz. Da ein schiefwinkliges Parallelogramm (nach §. 139) einem rechtwinkligen von gleicher Grundlinie und Höhe, dem Flächeninhalte nach, gleich ist, so wird der Flächeninhalt eines jeden Parallelogramms gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe mit gleichem Maße mißt und die Zahlen, die man erhält, mit einander multiplicirt. Das Produkt giebt die Anzahl der Quadrate, welche im Parallelogramm enthalten sind.

Bezeichnet G die Zahl, welche angiebt, wie oft ein Längenmaß (Fuß, Zoll u. s. w.) in der Grundlinie enthalten ist, und bezeichnet H die Zahl, welche angiebt, wie oft das Maß in der Höhe enthalten ist, so ist der Flächeninhalt des Parallelogramms (Fl.▭)=G.H.

Dies drückt man der Kürze wegen so aus: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus

Grundlinie und Höhe. Ist der Flächeninhalt eines Parallelogramms und eine der Dimensionen, entweder Grundlinie oder Höhe, bekannt, so wird die andere Dimension gefunden, wenn man den Flächeninhalt durch die bekannte Dimension theilt. Es ist daher

$$G = \frac{Fl.\square}{H} \text{ und } H = \frac{Fl.\square}{G}.$$

§. 153.

Zusatz. Bezeichnen G und g die Grundlinien zweier Parallelogramme, H und h die Höhen, so verhalten sich deren Flächeninhalte wie $GH:gh$, bei gleichen Höhen wie $G:g$, und bei gleichen Grundlinien, wie $H:h$.

§. 154.

Zusatz. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze §. 143 ist bewiesen worden, daß (Fig. 104) $BC^2 = BEML$ und $AC^2 = ADML$ ist.

Da aber die Rechtecke BEML und ADML eine Seite, welche als Höhe betrachtet werden kann, unter sich und mit dem Quadrate ADEB (AB^2) gleich haben, nämlich

$LM = BE = AD$, so folgt:

$$BEML : ABED = BL : AB,$$

$$ADML : ABED = AL : AB, \text{ ferner}$$

$$BEML : ADML = BL : AL.$$

Es ist daher

$$BC^2 : AB^2 = BL : AB, \text{ und}$$

$$AC^2 : AB^2 = AL : AB, \text{ ferner}$$

$$BC^2 : AC^2 = BL : AL,$$

d. h. das Quadrat einer jeden Kathete verhält sich zum Quadrate der Hypotenuse, wie der anliegende Abschnitt derselben zur ganzen Hypotenuse, und die Quadrate der Katheten verhalten sich zu einander, wie die anliegenden Abschnitte der Hypotenuse.

§. 155.

Zusatz. Das Quadrat kann als ein Rechteck betrachtet werden, in welchem Grundlinie und Höhe gleich sind. Der Flächeninhalt des Quadrats ergiebt sich daher, wenn man eine Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.

Bezeichnet G den Flächeninhalt des Quadrats, und S eine Seite desselben, so ist $G = S.S = S^2$.

Ist der Flächeninhalt (Q) eines Quadrats bekannt, so wird dessen Seite (S) gefunden, wenn man aus dem Flächeninhalte die Quadratwurzel auszieht, also $S = \sqrt{Q}$.

§. 156.

Zusatz. Da ein Dreieck (nach §. 140) die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Höhe und Grundlinie ist, so wird der Flächeninhalt desselben gefunden, wenn man Grundlinie und Höhe mit gleichem Maße mißt, und die Hälfte von dem Produkte der dabei erhaltenen Zahlen nimmt. Es ist daher der Flächeninhalt des Dreiecks (Fl.△) dem halben Produkte aus der Grundlinie und der halben Höhe, oder dem Produkte aus der Höhe und der halben Grundlinie gleich, nämlich:

$$Fl.\triangle = \frac{G.H}{2} = G.\frac{H}{2} = \frac{G}{2}.H.$$

Ist der Flächeninhalt eines Dreiecks und eine der Dimensionen, entweder Grundlinie oder Höhe bekannt, so wird die andere Dimension gefunden, wenn man in den gegebenen Flächeninhalt mit der halben bekannten Dimension, oder wenn man in den doppelten Flächeninhalt mit der ganzen bekannten Dimension theilt, nämlich:

$$G = \frac{Fl.\triangle}{\left(\frac{H}{2}\right)} = \frac{2.Fl.\triangle}{H},$$

$$H = \frac{Fl.\triangle}{\left(\frac{G}{2}\right)} = \frac{2.Fl.\triangle}{G}.$$

§. 157.

Zusatz. Dreiecke verhalten sich, wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe; bei gleichen Höhen aber, wie ihre Grundlinien, und bei gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen.

§. 158.

Zusatz. Ein Trapez ist (nach §. 142, 8) im Flächeninhalte einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie der Summe beider Parallelen des Trapezes, und dessen Höhe der Entfernung dieser Parallelen gleich kömmt (Fig. 100). Der Flächeninhalt des Trapezes wird daher gefunden, wenn man die beiden Parallelen und ihre Entfernung mit gleichem Maße mißt, alsdann entweder die Summe der Maßzahlen für die beiden Parallelen mit der Maßzahl ihrer Entfernung multiplizirt und von dem Produkte die Hälfte nimmt, oder wenn man die halbe Summe der Maßzahlen für die Parallelen mit der ganzen Maßzahl ihrer Entfernung, oder die halbe Maßzahl der Entfernung mit der Summe der Maßzahlen beider Parallelen multiplizirt.

Bezeichnen P und p die Maßzahlen der beiden Parallelen und H die Maßzahl ihrer Entfernung oder der Höhe des Trapezes, so ist der Flächeninhalt des Trapezes:

$$\frac{(P+p).H}{2}=\frac{P+p}{2}.H=(P+p).\frac{H}{2}.$$

Gewöhnlich nimmt man das zweite Verfahren und sagt der Kürze wegen: Der Flächenraum eines Trapezes ist dem Produkte aus der halben Summe der beiden Parallelen in ihre Entfernung gleich.

Sind die beiden Parallelen eines Trapezes und sein Flächeninhalt bekannt, so wird die Höhe des Trapezes oder die Entfernung der beiden Parallelen gefunden, wenn man entweder in den Flächeninhalt mit der halben Summe der

Parallelen, oder in den doppelten Flächeninhalt mit der ganzen Summe der Parallelen theilt. Es ist also

$$H = \frac{\text{Fl.Trapz.}}{\left(\frac{P+p}{2}\right)} = \frac{2.\text{Fl.Trapz.}}{P+p}.$$

Die Summe der beiden Parallelen wird erhalten, wenn man den Flächeninhalt durch die halbe Höhe, oder den doppelten Flächeninhalt durch die ganze Höhe theilt, also

$$P+p = \frac{\text{Fl.Trapz.}}{\left(\frac{H}{2}\right)} = \frac{2.\text{Fl.Trapz.}}{H}.$$

§. 159.

Zusatz. Der Flächeninhalt jedes Vielecks wird erhalten, wenn man das Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke theilt, und den Flächeninhalt der einzelnen Dreiecke berechnet. Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke giebt den Flächeninhalt des Vielecks.

§. 160.

Zusatz. Da (nach §. 142, 10) ein regelmäßiges Vieleck einem Dreiecke gleich ist, dessen Grundlinie dem Umfange des Vielecks, und dessen Höhe dem Halbmesser des eingeschriebenen Kreises gleich kommt: so wird der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vielecks gefunden, wenn man den Umfang und den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises mit gleichem Maße mißt, und das Produkt der dabei erhaltenen Zahlen durch 2 theilt. Der Kürze wegen sagt man:

Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vielecks ist dem Produkte des Umfanges in den halben Halbmesser des eingeschriebenen Kreises gleich.

§. 161.

Zusatz. Der Kreis ist (nach §. 142, 11) einem Dreiecke gleich, welches die Länge der Peripherie zur Grundseite

und den Halbmesser zur Höhe hat. Kennt man nun die Maßzahlen für die Peripherie und den Halbmesser, so giebt das halbe Produkt dieser Zahlen den Flächeninhalt des Kreises.

Die §§. 191—196 enthalten die Lehre von der Kreisberechnung.

§. 162.

Beispiele.

1) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Ackers von der Form eines Rhomboids, wenn seine Grundseite 21° 2′ 5″ Dec. und seine Höhe 9° 8′ Dec. beträgt? —

Auflösung. 21° 2′ 5″ Dec. = 2125″ und 9° 8′ Dec. = 980″. Der Flächeninhalt beträgt:

2125.980 = 2082500 □″ Dec. = 20825 □′ = 208 □° 25 □′ Dec.

2) Das Brettern eines Zimmerbodens von der Form eines Rechtecks kam auf 79 fl. 12 kr., da ein Quadratfuß 11 kr. kostete. Wie lang ist das Zimmer, wenn es 18′ Breite hat?

Auflösung. Der Zimmerboden beträgt:

$\frac{4752}{11} = 432$ □′; folglich die Länge: $\frac{432}{18} = 24'$.

3) Ein rechtwinkliges Zimmer, das 22′ lang, 15′ 8″ breit und 14′ hoch ist, hat 3 Fenster, jedes 2′ 6″ breit und 3′ 2″ hoch, und eine Thüre 7′ hoch und 3′ breit. Wie hoch kommt das Weißen der Wände und der Decke dieses Zimmers, wenn der Quadratfuß 1/4 kr. kostet?

4) Welchen Flächeninhalt hat ein Dreieck, dessen Grundseite 8′ 9″ und dessen Höhe 15′ beträgt?

5) Welche Höhe muß ein Dreieck erhalten, dessen Grundseite 10′ 4″ Dec. betragen, und dessen Flächeninhalt einem Rechtecke gleich kommen soll, welches 26′ lang und 6′ 8″ Dec. breit ist?

Auflösung. Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt:

26. 6,8 = 176, 8 □′.

Die Höhe ist $= \frac{2.\ 176,8}{10,\ 4} = 34'$.

6) Welche Grundlinie muß ein Dreieck erhalten, dessen Höhe 15′ betragen, und dessen Flächeninhalt fünf Rechtecken, jedes 6′ lang und 4′ breit, gleich sein soll?

7) Es soll ein Gartenbeet von der Form eines Rechtecks angelegt werden, dessen Flächeninhalt einem Quadrat, dessen Seite 14′ mißt, gleich sei. Wie breit muß das Rechteck werden, wenn die Länge 35′ betragen soll?

Auflösung. Die Breite beträgt:

$$\frac{14.14}{35}=\frac{28}{5}=5\frac{3'}{5}=5'\ 6''\ \text{Dec.}$$

8) Wie viel Bäume können auf eine Quadratfläche, deren Seite 18⁰ 5′ Dec. mißt, gepflanzt werden, wenn auf den Baum 25 □′ gerechnet werden?

9) Ein Zimmerboden von der Form eines Trapezes, wovon die eine Parallele 28′, die andere 20′ 8″ Dec., und ihre Entfernung 16′ 5″ Dec. mißt, soll gebrettert werden.

a) Wie viel Bretter, jedes 8′ lang und 1′ 2″ Dec. breit, sind hierzu nöthig?

b) Wie viel kostet die Belegung, wenn der Quadratfuß auf 8 kr. 3 Pf. zu stehen kömmt?

10) Wie hoch ist ein Trapez, dessen Flächeninhalt 420 □′ enthält, und wovon die eine Parallele 18′, die andere 21′ 4″ beträgt?

11) Der Flächeninhalt eines Trapezes beträgt 600 □′, der Abstand der beiden Parallelen 24′, die eine Parallele 34′ 8″ Dd.; wie groß ist die andere Parallele?

12) Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 120 □′ die eine Kathete 1⁰ 8″ Dd.; wie groß ist die andere Kathete?

13) Wie lang muß ein Rechteck werden, das im Flächeninhalte einem Dreiecke gleich kommen soll, dessen Grundlinie 10′, und dessen Höhe 6′ 5″ Dd. beträgt, wenn das Rechteck 4′ breit werden soll?

14) In einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ist eine Kathete 1′ 4″ lang; win groß ist der Flächeninhalt?

15) Wie groß ist der Flächeninhalt eines Quadrats, dessen Seite 5′ 3″ Dd. mißt?

16) Ein Zimmer ist 36′ lang, 24′ breit und 12 hoch, welchen Flächenraum nehmen die vier Wände, die Decke und der Boden ein?

17) Eine Kiste soll 4′ 2″ lang, 2′ 3″ breit und 3′ hoch werden; wie viel Quadratfuß Bretter braucht man hierzu, den Deckel mitgerechnet?

18) Welche Höhe muß ein Dreieck erhalten, dessen Grundlinie 27′

betragen, und dessen Flächeninhalt dem eines Trapezes gleich sein soll, wobei die eine Parallele 15′, die andere 21′, und ihre Entfernung 18′ mißt?

19) Wie groß ist der Flächeninhalt eines regelmäßigen Zwölfecks, dessen Seite 10″ Dd. mißt, wenn der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises 1′ 6″ 8‴ Dd. beträgt?

20) Ein regelmäßiges Achteck, dessen Seite 8″ Dc. lang ist, soll vergoldet werden. Wie hoch kommt die Vergoldung, wenn der Quadratzoll 20 kr. kostet, und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises 9″ 6‴ 5⁗ Dc. beträgt?

21) Die Seite eines regelmäßigen Achtecks ist 6″ Dd. lang, und der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises mißt 7″ 3‴ Dd.; wie viel kostet die Vergoldung dieser Figur, wenn der Quadratzoll auf 18 kr. kommt?

Anmerkung. Soll die Anzahl der Ziegel eines Daches berechnet werden, so verfährt man eben so, wie bei Auffindung des Flächeninhaltes; indem man die Ziegel als Flächenmaß annimmt und die Zahl der Latten als Höhe.

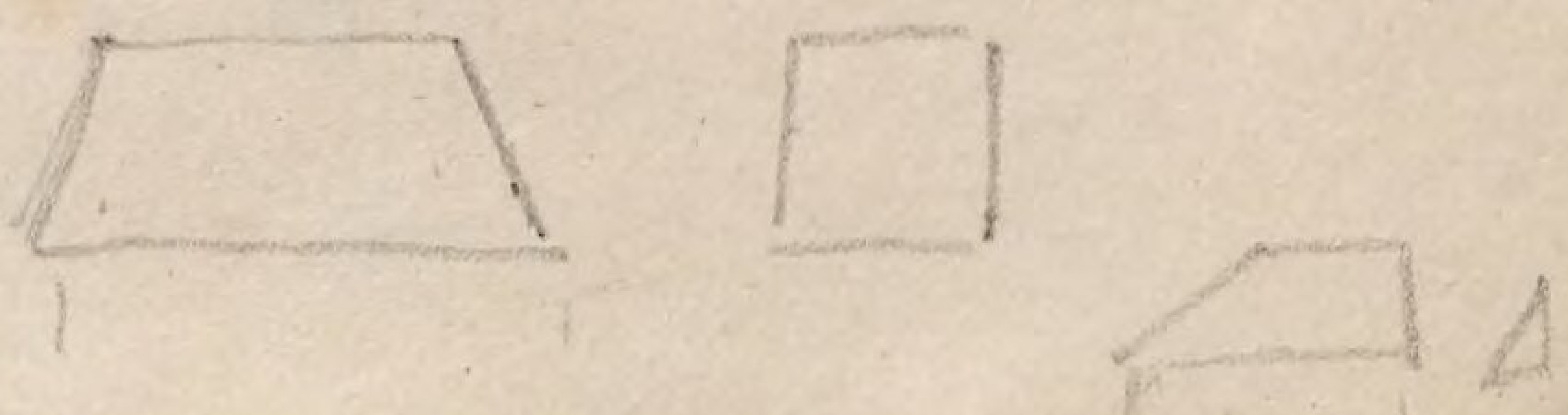
Ein Dach von der Form eines Parallelogramms enthält also so viel Ziegel, als das Produkt aus der Zahl der Ziegel einer Latte in die Zahl der Latten beträgt.

Die Ziegelzahl eines Daches von der Form eines Trapezes wird erhalten, wenn man die halbe Summe der Ziegel auf den beiden äußersten Latten mit der Zahl der Latten multiplicirt.

Soll die Menge der Ziegel für ein Dach dieser Form bestimmt werden, so theilt man mit der Breite eines Ziegels in die Länge der beiden äußersten Latten, und in ihre Entfernung mit der Summe der Zahlen für Lattenbreite und Entfernung der einzelnen Latten von einander. Das halbe Produkt der so erhaltenen Quotienten giebt die Anzahl der Ziegel. Ein Dach von der Form eines Dreiecks wird betrachtet als ein Trapez, in welchem die eine Parallele im Vergleich mit der anderen eine sehr kleine Ausdehnung hat, da auf der Latte, welche der Spitze des Dreiecks am nächsten ist, auch nur ein Ziegel sein kann.

Beispiele.

1) Wie viel Ziegel enthält ein Dach von der Form eines Trapezes, wenn auf der obersten Latte 70 Ziegel, auf der untersten 95 sich befinden, und die Lattenzahl 50 beträgt?



2) Wie viel Ziegel sind zur Bedeckung eines Daches von der Form eines Trapezes nöthig, dessen oberste und unterste Lattenlänge zusammen 70′ betragen, deren Entfernung aber 30′ mißt, wenn die Ziegelbreite 8″ Dd. und die Entfernung der einzelnen Latten 2″ Dd. beträgt?

3) Wie viel Ziegel braucht man zur Bedeckung eines Daches von derselben Form, das unten 58′ und oben 46′ lang ist, und dessen schiefe Höhe 22′ beträgt, wenn jeder Ziegel eine Fläche (Rechteck) bedeckt, die 5″ breit und 6″ lang ist.

4) Ein sechseckiges Gartenhaus soll mit gewalztem Zink gedeckt werden. Jedes Dreieck der Dachfläche ist am Rand des Daches 7′ lang und 10′ hoch. Was kostet die Bedeckung, wenn 12□′ Zinkblech 8 ℔ wiegen, und das ℔ 18 kr. kostet?

Von den Proportional-Linien.

§. 163.

Lehrsatz. Zieht man in einem Dreiecke eine Gerade parallel zu einer Seite desselben, so werden dadurch die zwei andern Seiten in gerader Proportion geschnitten. Ist z. B. im △ABC (Fig. 110) DE∥AB, so ist

AD : DC = BE : EC.

Beweis. Zieht man DB und EA, so ist (nach §. 141) △DEA = △EDB, weil sie gleiche Grundlinie haben, und zwischen einerlei Parallelen errichtet sind. Es ergiebt sich daher die Proportion:

△DEA : △DEC = △EDB : △DEC.

Nach §. 157 ist

△DEA : △DEC = AD : DC;

denn die Dreiecke DEA und DEC haben gleiche Höhe und verhalten sich daher wie ihre Grundlinien, eben so

△EDB : △DEC = BE : EC.

Aus den beiden letzten Proportionen folgt:

$AD:DC=BE:EC.$

Aus dieser Proportion erhält man durch Versetzung und Verwechslung der Glieder, ferner durch Addition der Hinterglieder zu den Vordergliedern folgende Proportionen:

$DC:AD=EC:BE,$

$DC+AD:AD=EC+BE:BE,$ oder

$CA:AD=CB:BE,$ und

$AD:CA=BE:CB,$

$AD+DC:DC=BE+EC:EC,$ oder

$CA:DC=CB:EC,$ ferner

$DC:EC=AD:BE,$

$AD:BE=DC:EC,$

$CA:CB=DC:EC,$

$CA:CB=AD:BE.$

§. 164.

Zusatz. Zieht man im $\triangle ABC$ (Fig. 111) $DE \ddagger AB$ und $DF \ddagger EB$, so ist DEBF ein Parallelogramm, daher

$DE=FB,\ DF=EB.$

Nach vorhergehendem §. ist

$CD:CA=BF:AB,$ oder

$CD:CA=DE:AB,$ und

$CD:DE=CA:AB.$

Denkt man sich noch eine Parallele durch E mit CA gezogen, so erhält man:

$CE:CB=DE:AB,$ und

$CE:DE=CB:AB.$

§. 165.

Lehrsatz. Werden in einem Dreiecke zwei Seiten durch eine gerade Linie in gerader Proportion

geschnitten, so ist diese Linie der dritten Seite des Dreiecks parallel. Ist z. B. im △ABC (Fig. 112)

CD:DA=CE:EB, so ist

DE‡AB.

Beweis. Gesetzt DE wäre nicht ‡ AB, sondern irgend eine andere Gerade, z. B. DF, so erhielte man (nach §. 163)

CD:DA=CF:FB.

Da aber nach der Annahme auch

CD:DA=CE:EB ist, so müßte

weil CD:DA=CD:DA ist,

CF:FB=CE:EB sein, oder

CF:CE=FB:EB.

Es ist aber nicht möglich, daß das größere Stück CF in dem kleineren CE so oft enthalten ist, als das kleinere FB in dem größeren EB, daher kann DF nicht ‡ AB sein. Dasselbe läßt sich von jeder andern Geraden außer DC beweisen, woraus folgt, daß nur diese mit AB parallel ist.

§. 166.

Lehrsatz. Zieht man zwischen zwei Geraden AM, BN (Fig. 113) mehrere Parallelen AB, CD, EF u. s. w., so stehen die abgeschnitten Stücke unser sich in gerader Proportion, nämlich

AC:CE=BD:DF,

CE:EG=DF:FH u. s. w.

Beweis. Ist AM‡BN, so entstehen lauter Parallelogramme; da nun in solchen allemal die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind, so folgt in diesem Falle die Richtigkeit des Satzes für sich.

Ist AM nicht parallel zu BN, so verlängert man AM und BN, bis sie sich in einem Punkte schneiden. Man erhält alsdann (nach §. 163)

OA:OB=AC:BD,
OC:OD=CE:DF.

Es ist aber

OA:OB=OC:OD, daher auch
AC:BD=CE:DF u. s. w.

§. 167.

Aufgabe. Eine gegebene Gerade AB (Fig. 114) in mehre z. B. drei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung und Beweis. Man lege an A unter einem beliebigen Winkel die unbestimmte AN und trage auf diese von A gegen N drei gleiche Theile von beliebiger Größe auf, wie AE=ED=DC; alsdann ziehe man CB und mit ihr durch D, E die Parallelen DF, EG. Hierdurch wird AB in drei gleiche Theile getheilt; es ist nämlich AG=GF=FB;

denn BF:BA=CD:CA, und
BG:BA=CE:CA.

Da nun CD=$\frac{1}{3}$CA und CE=$\frac{2}{3}$CA ist, so muß auch BF=$\frac{1}{3}$BA und BG=$\frac{2}{3}$BA sein; folglich ist AB in drei gleiche Theile getheilt.

§. 168.

Aufgabe. Eine gegebene Gerade AB (Fig. 115) so zu theilen, daß sich die Theile, wie mehre andere gegebenen Geraden verhalten, z. B. wie die drei Geraden M, N, P.

Auflösung und Beweis. Man lege an A unter einem beliebigen Winkel die unbestimmte AL, trage darauf AD=M, DE=N, EC=P auf, ziehe CB und mit CB durch E und D die Parallelen EG, DF, so ist (nach §. 166)

AF:FG=AD:DE,
FG:GB=DE:EC, oder

AF:FG=M:N,

FG:GB=N:P, und

AF:GB=M:P.

§. 169.

Aufgabe. Zu drei gegebenen Geraden M, N und P (Fig. 116) die vierte Proportionale zu finden.

Auflösung und Beweis. Man mache eine Gerade AB=M, ihre Verlängerung BC=N, lege an A unter einem beliebigen Winkel die AD=P, ziehe BD und durch C die mit ihr Parallele CE, so ist DE die gesuchte Proportionale; denn (nach §. 163) ist

AB:BC=AD:DE, oder

M:N = P:DE.

§. 170.

Zusatz. Soll zu zwei gegebenen Geraden M und N die dritte Proportionale gefunden werden, so sucht man zu den drei Geraden M, N und N die vierte.

§. 171.

Aufgabe. Ein Parallelogramm, dessen Grundlinie M und Höhe N gegeben sind, in ein anderes gleich großes zu verwandeln, wovon eine der Dimensionen z. B. die Höhe H gegeben ist.

Auflösung und Beweis. Da die Flächeninhalte gleich sind, so ist

M.N=H.X, woraus die Proportion folgt:

H:M=N:X.

Man findet daher die Grundlinie, wenn man zu H, M und N die vierte Proportionale sucht.

§. 172.

Zusatz. Ist ein Dreieck in ein gleich großes Parallelogramm, wovon eine Dimension gegeben ist, zu verwandeln,

oder umgekehrt; so verfährt man, wie vorher, nur muß eine Dimension des Dreiecks halbirt werden.

§. 173.

Aufgabe. Die Höhe eines Gegenstandes (eines Baumes, Thurmes u. s. w.) auf ebenem Felde zu messen.

Auflösung und Beweis. Ist z. B. AB (Fig. 117) die zu bestimmende Höhe, so zieht man aus dem Endpunkte B eine Gerade BE, und errichtet zwei Stäbe, einen größeren CD und einen kleineren EF, senkrecht in ihr, und zwar in solcher Entfernung, daß das Auge in F die Punkte F, D, A in einer einzigen Geraden sieht. Denkt man sich durch F eine Parallele FH zu EB gezogen, so erhält man, da CD‡AB, die Proportion:

$$FG:FH=GD:HA.$$

Es ist aber FG=EC, FH=BE und GD=CD−EF, daher ergiebt sich:

$$EC:BE=(CD-EF):HA.$$

Addirt man nun zur gefundenen Geraden HA die Gerade EF=HB hinzu, so ergiebt sich die gesuchte Höhe AB.

§. 174.

Aufgabe. Auf dem Felde durch einen Punkt O mit einer gegebenen Geraden AB (Fig. 118) eine Parallele zu ziehen.

Auflösung und Beweis. Man ziehe von O an AB irgend eine Gerade OC und mache die Verlängerung CD=OC, lege an C unter beliebigem Winkel die DE, mache deren Verlängerung EF=DE und verbinde F mit O, so ist FO‡AB; denn CD:OC=DE:EF, folglich ist (nach §. 165) OF‡EC, oder OF‡AB.

§. 175.

Aufgabe. Eine Gerade in 1000 gleiche Theile zu theilen, oder einen geometrischen Maßstab zu verfertigen.

Auflösung und Beweis. Man ziehe eine Gerade AB, trage von A gegen B 10 gleiche Theile von beliebiger Länge, z. B. ganze oder halbe Zolle, auf, in A und B errichte man Senkrechten, trage auf jeder derselben zehn beliebig lange, unter sich gleiche Theile auf. Durch die Theilungspunkte dieser Senkrechten ziehe man zehn gerade Linien, welche alle mit AB parallel und gleich sein werden. Auf die letzte, nämlich CD, trage man dieselben gleichen Theile, wie auf AB, auf, und verbinde die Theilungspunkte der beiden Linien AB und CD mit den Geraden ab, 100 d, 200 e u. s. w.; alsdann theile man den ersten gleichen Theil der Geraden AB und CD, nämlich Aa und Cb, in zehn gleiche Theile und ziehe durch diese Theilungspunkte die Querlinien am, 10 n u. s. w.; endlich schreibe man noch die Zahlen an, wie Fig. 119 darthut, so ist die Gerade AB in 1000 gleiche Theile getheilt.

Es ist nämlich o1 der 10te Theil von mb, da

a1 : ab = o1 : mb ist; es ist aber

$a1 = \frac{1}{10} ab$, folglich $o1 = \frac{1}{10} mb$.

Da aber $mb = \frac{1}{10} Cb = \frac{1}{10} Aa$, so ist

$$o1 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} Aa = \frac{1}{100} Aa.$$

Aa ist aber $\frac{1}{10} AB$, folglich

$$o1 = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{10} AB = \frac{1}{1000} AB.$$

Eben so wird bewiesen, daß $p7 = \frac{7}{1000}$ der ganzen Linie AB sei, u. s. w.

Läßt man den Theil Aa eine Ruthe bedeuten, so stellt o1 einen Zoll vor; soll aber Aa einen Fuß bedeuten, so ist o1 eine Linie.

Ein Maßstab heißt ein verjüngter oder künstlicher, wenn die kleinen gleichen Theile auf ihm größere Maße, womit in der Natur gerade Linien ausgemessen werden, bedeuten sollen.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 176.

Erklärung. Ebene geradlinige Figuren heißen ähnlich, wenn

1) die Anzahl der Seiten gleich ist,
2) die Winkel der Ordnung nach gleich sind, und
3) die gleich liegenden Seiten, d. i. solche, welche gleiche Winkel einschließen, proportional sind.

§. 177.

Zusatz. Kongruente Figuren sind ähnlich und gleich groß; ähnliche Figuren aber können dem Flächeninhalte nach sehr ungleich sein; sind sie gleich groß, so müssen sie auch kongruent sein.

§. 178.

Zusatz. Regelmäßige Figuren von gleichviel Seiten sind ähnlich; denn sie haben lauter gleiche Winkel und proportionirte Seiten, da sich je zwei Seiten der einen sowohl, als je zwei Seiten der andern, wie 1 zu 1 verhalten.

§. 179.

Zusatz. Alle Kreise sind, als regelmäßige Figuren von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten, ähnlich.

§. 180.

Zusatz. Ausschnitte und Abschnitte von ungleichen Kreisen heißen ähnlich, wenn sie zu gleichen Mittelpunktwinkeln gehören.

§. 181.

Zusatz. Zwei Figuren, welche der nämlichen dritten ähnlich sind, sind auch unter sich ähnlich.

§. 182.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke, sind ähnlich,

1) wenn die drei Winkel des einen Dreiecks den drei Winkeln des andern gleich sind, oder wenn zwei Winkel des einen zweien Winkeln des andern gleich sind, (weil dann auch [nach §. 87] die dritten Winkel gleich sein müssen);

2) wenn die Seiten des einen Dreiecks den Seiten des andern parallel sind;

3) wenn zwei Seiten des einen Dreiecks mit zwei Seiten des andern in Proportion stehen, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich sind;

4) wenn die drei Seiten des einen Dreiecks den drei Seiten des andern proportional sind.

Beweis zu 1) (Fig. 120). Aus C schneide man CD=ca und CE=cb ab und ziehe DE, so ist $\triangle CDE \cong \triangle cab$ (nach §. 47), daher $\angle CDE = \angle cab = \angle CAB$, folglich (nach §. 79) $DE \parallel BA$.

Man erhält nun (nach §. 163) folgende Proportionen:

$CD : DE = CA : AB$,

$CE : DE = CB : AB$, daher

$CD : CE = CA : CB$, oder

$ca : ab = CA : AB$,

$cb : ab = CB : AB$ und

$ca : cb = CA : CB$.

Beweis zu 2) (Fig. 121). Man verlängere ab, bis sie AC und BC in D und E schneidet, so ist (nach §. 78)

$\angle$cab=$\angle$CDE=$\angle$CAB, und $\angle$cba=$\angle$CED=$\angle$CBA, folglich ist, wie vorher bewiesen wurde, $\triangle$acb∾$\triangle$ACB.

Beweis zu 3) (Fig. 120). Ist $\angle$acb=$\angle$ACB, und

ca : CA=cb : CB, so ist

$\triangle$cab∾$\triangle$CAB.

Man schneide aus C CD=ca und CE=cb ab, so ist (nach §. 47) $\triangle$CDE≅$\triangle$cab. Da nun

ca : CA=cb : CB, oder

CD : CA=CE : CB ist, so muß (nach §. 165) DE‡AB sein, und (nach §. 78) $\angle$CDE=$\angle$CAB und $\angle$CED=$\angle$CBA. Es ist daher $\triangle$CDE∾$\triangle$CAB, oder

$\triangle$cab∾$\triangle$CAB.

Beweis zu 4) (Fig. 120). Nach der Annahme ergeben sich die Proportionen:

ca : CA=ab : AB,

cb : CB=ab : AB, und

ca : CA=cb : CB.

Man schneide aus C CD=ca ab, und CE=cb, so ist nach dem Vorhergehenden $\triangle$CDE∾$\triangle$CAB. Da nun

CD : CA=DE : AB und nach der Annahme

ca : CA= ab : AB sich verhält, so folgt

CD : ca =DE : ab. Da aber CD=ca ist, so muß auch DE=ab sein.

Es sind daher die Seiten des $\triangle$CDE gleich den Seiten des $\triangle$cab, folglich $\triangle$CDE≅$\triangle$cab. Da nun

$\triangle$CDE∾$\triangle$CAB ist, so muß auch

$\triangle$cab∾$\triangle$ABC sein.

§. 183.

Lehrsatz. Zwei ähnliche Vielecke werden durch gleich liegende Diagonalen in gleichviel ähnliche und gleich liegende Dreiecke zerlegt. Ist z. B. (Fig. 122) abcde∾ABCDE, und zieht man die gleich liegenden Diago=

nalen db und DB, DA und da, so werden beide Figuren in gleichviel ähnliche und gleich liegende Dreiecke zerlegt nämlich $\triangle DCB \backsim \triangle dcb$,

$\triangle DBA \backsim \triangle dba$,

$\triangle DAE \backsim \triangle dae$.

Beweis. Wegen der Aehnlichkeit der Figuren sind die Winkel der Ordnung nach einander gleich, und die gleich liegenden Seiten proportional, daher ist:

$DC:dc = CB:cb$, und

$\surd DCB = \surd dcb$, folglich (nach §. 182, 3)

$\triangle DCB \backsim \triangle dcb$, daher

$\surd CDB = \surd cdb$ und $\surd CBD = \surd cbd$.

Da nun $\surd CBA = \surd cba$, so folgt

$\surd CBA - \surd CBD = \surd cba - \surd cbd$, oder $\surd DBA = \surd dba$.

Ferner ist $BC:bc = BD:bd$, und

$BC:bc = AB:ab$, folglich

$BD:bd = AB:ab$.

Es ist daher (nach §. 182, 3) $\triangle DBA \backsim \triangle dba$. Eben so beweis't man die Aehnlichkeit jedes folgenden Paares gleich liegender Dreiecke.

§. 184.

Zusatz. Lassen sich zwei Vielecke von gleichviel Seiten durch gleich liegende Diagonalen in gleichviel ähnliche und gleich liegende Dreiecke zerlegen, so sind diese Vielecke selbst ähnlich.

§. 185.

Aufgabe. Ueber einer gegebenen Geraden AB (Fig. 123) ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen abc ähnlich ist.

Auflösung und Beweis. Man mache $\surd CAB = \surd cab$, $\surd CBA = \surd cba$, und verlängere die Schenkel AC, BC, bis sie sich in C schneiden, so ist $\triangle ABC \backsim \triangle abc$ (nach §. 182, 1).

§. 186.

Zusatz. Soll über einer gegebenen Geraden AB (Fig. 124) ein Vieleck beschrieben werden, welches einem gegebenen abcde ähnlich ist, so theilt man das gegebene Vieleck durch, sich nicht schneidende, Diagonalen be, bd in Dreiecke, macht über AB ein dem △abe ähnliches △ABE, über BE △BED∾△bed, ferner über BD

△BDC∾△bdc. Es ist alsdann

ABCDE∾abcde (nach §. 184).

§. 187.

Lehrsatz. Die Umfänge (Umringe) zweier ähnlichen Vielecke verhalten sich, wie zwei gleich liegende Seiten oder Diagonalen.

Beweis. Ist (Fig. 125) abcde∾ABCDE, so ist

$$ab:AB=bc:BC=cd:CD=de:DE=ea:EA.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$ab+bc+cd+de+ea:AB+BC+CD+DE+EA=$$
$$bc:BC=cd:CD=de:DE,$$ oder

Umfang abcde:Umfang ABCDE=ab:AB=bc:BC u. s. w.

Zieht man die gleich liegenden Diagonalen, so ist (nach §. 183) ab:AB=be:BE=bd:BD.

Daher auch

Umfang abcde:Umfang ABCDE=be:BE=bd:BD.

§. 188.

Lehrsatz. Die Umfänge (Umringe) zweier regelmäßigen Vielecke von gleichviel Seiten verhalten sich, wie die Halbmesser oder Durchmesser der um dieselben beschriebenen Kreise.

Beweis. Sind (Fig. 126) ABCDEF und abcdef regelmäßige Figuren von gleichviel Seiten, so sind sie (nach §. 178) ähnlich.

Es folgt aus dem vorhergehenden §.

Umfang ABCDEF : Umfang abcdef = AB : ab.

Da aber $\sqrt{}$AOB = $\sqrt{}$aob (nach §. 126) ist, und die Dreiecke AOB und aob gleichschenklig sind, so ist (nach §. 182, 3)

△AOB ∾ △aob, folglich

AB : ab = AO : ao, daher

Umfg. ABCDEF : Umfg. abcdef = AO : ao = R : r = 2R : 2r = D : d.

§. 189.

Zusatz. Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich, wie ihre Halb- oder Durchmesser, da die Kreise als regelmäßige Vielecke von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachtet werden können.

§. 190.

Aufgabe. Das Verhältniß des Durchmessers des Kreises zur Peripherie zu finden.

Auflösung und Beweis. Der Unterschied des Umfanges des in und um einen Kreis beschriebenen regelmäßigen Vielecks wird immer kleiner, je mehr Seiten das regelmäßige Vieleck enthält; denn durch fortgesetztes Halbiren der Bogen nähern sich die regelmäßigen Vielecke dem Kreise selbst.

Findet man nun zwei regelmäßige Vielecke, wovon das eine in, das andere um den Kreis beschrieben ist, deren Umfänge unendlich wenig von einander unterschieden sind, so werden sie auch unendlich wenig von der Peripherie abweichen, und können für diese genommen werden.

Ist (Fig. 127) ABCDFL ein in den Kreis eingeschriebenes Sechseck, so ist die Seite CB nach §. 129 dem Halbmesser OC gleich. Halbirt man den Bogen CB und zieht CE, die Seite des regelmäßigen Zwölfecks (nach §. 130), so findet man CE, wenn man aus der Summe der Quadrate von CG und GE die Quadratwurzel auszieht, und so kann durch fortgesetztes Halbiren der Bogen immer die Seite des

Staatliche Bibliothek Bamberg

eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks von noch einmal so viel Seiten, folglich auch dessen Umfang, gefunden werden.

Ist die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks bekannt, so wird die des umschriebenen z. B. MN=2NE durch Proportion erhalten, wie

$$OG : OE = CG : NE.$$

Setzt man den Durchmesser = 1, 100, 1000 u. s. w., so findet man das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang sowohl des eingeschriebenen als umschriebenen Vielecks.

Ludolph von Ceulen hat durch sechzigmal wiederholtes Halbiren des von dem Halbmesser umspannten Bogens gefunden, daß die Umfänge des so erhaltenen eingeschriebenen und umschriebenen Vielecks unendlich wenig von einander unterschieden sind, und sonach die Peripherie des Kreises für diese gesetzt werden kann.

Man erhält auf diese Weise das Verhältniß des Durchmessers des Kreises zur Peripherie, beim Durchmesser = 1, nämlich: 1:3,14159..., oder der Kürze wegen: 1:3,14= 100:314, wofür auch 7:22 genommen wird.

Die Zahl 3,14159... nennt man ihrem Berechner zu Ehren die Ludolphische Zahl und bezeichnet sie mit dem griechischen Buchstaben π (sprich: pi).

In gewöhnlichen Rechnungsfällen, worin π vorkommt, begnügt man sich mit 3,14 oder mit $3\frac{1}{7}$; in Fällen jedoch, welche größere Genauigkeit erfordern, nimmt man 3,1416.

§. 191.

Zusatz. Da die Peripherien der Kreise sich, wie ihre Durchmesser oder Halbmesser (nach §. 189) verhalten, so findet man die Peripherie (P) irgend eines Kreises aus seinem Durchmesser (d) oder Halbmesser (r), wenn man den Durchmesser oder doppelten Halbmesser mit π multiplicirt; denn

Staatliche Bibliothek Bamberg

$1 : d = \pi : P$, oder

$1 : 2r = \pi : P$, daher

$P = d\pi$ oder $P = 2r\pi$.

Da die Peripherie ein Produkt aus dem Durchmesser oder doppelten Halbmesser und π ist, so wird der Durchmesser gefunden, wenn man die Peripherie durch π dividirt, und der Halbmesser, wenn man die Peripherie durch 2mal π theilt. Es ist daher

$$d = \frac{P}{\pi} \text{ und } r = \frac{P}{2\pi}.$$

§. 192.

Zusatz. Der Flächeninhalt eines Kreises (K) ist (nach §. 142, 11) dem Produkte aus dem halben Halbmesser (r) und der Peripherie (P) gleich, nämlich

$K = \frac{1}{2} r . P$.

Setzt man nun statt P den oben gefundenen Ausdruck $2r\pi$, so erhält man:

$K = \frac{1}{2} r . 2r\pi = r . r\pi = r^2\pi$.

Der Flächeninhalt des Kreises wird daher gefunden, wenn man den Halbmesser mit sich selbst und noch mit π multiplicirt, oder, wenn man das Quadrat des Halbmessers mit π multiplicirt.

Aus dem Flächeninhalte (K) wird der Halbmesser (r) gefunden, wenn man den gegebenen Flächeninhalt durch π theilt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht, nämlich: $r = \sqrt{\frac{K}{\pi}}$.

§. 193.

Zusatz. Ein Kreisring ist der Unterschied zweier koncentrischen Kreise. Sein Flächeninhalt ergiebt sich, wenn

man vom Flächeninhalte des größeren Kreises den des kleineren abzieht. Am leichtesten erhält man den Flächeninhalt des Kreisringes, wenn man die Summe des größeren und des kleineren Halbmessers mit ihrem Unterschiede multiplicirt und dieses Produkt wiederum mit π.

Bezeichnet R den größeren und r den kleineren Halbmesser, so ist der Flächeninhalt des

$$\text{Ringes} = (R+r).(R-r).\pi;$$

$$\text{denn } R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2).\pi.$$

Nun ist aber die Differenz zweier Quadrate dem Produkte aus der Summe ihrer Wurzeln und deren Unterschiede gleich, folglich $(R+r).(R-r).\pi$.

§. 194.

Zusatz. Ist der Halbmesser (r) oder Durchmesser (d) und die Anzahl der Grade (n) eines Kreisbogens (oder der zugehörige Mittelpunktwinkel) bekannt, so kann die Länge (l) dieses Bogens gefunden werden. Es enthält nämlich die ganze Peripherie (P) 360°, man erhält daher die Proportion:

$$360 : n = P : l, \text{ woraus}$$

$$l = \frac{n.P}{360}.$$

Die Länge des Kreisbogens wird also gefunden, wenn man die Peripherie mit der Anzahl der Grade des Bogens multiplicirt und das Produkt durch 360 dividirt.

§. 195.

Zusatz. Umgekehrt findet man die Anzahl der Grade (n) eines Kreisbogens, wenn seine Länge (l) und der Halbmesser (r) bekannt sind, wenn man die Länge des Bogens mit 360 multiplicirt und das Produkt durch die Peripherie theilt. Man erhält nämlich die Proportion:

$P:l=360:n$, woraus folgt

$$n=\frac{360.l}{P}.$$

§. 196.

Zusatz. Ein Kreisausschnitt läßt sich als eine Menge Dreiecke betrachten, deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser des Kreises ist, und deren Grundlinien zusammengenommen den Bogen des Kreisausschnittes ausmachen. Man findet daher den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes (nach §. 142, 6), wenn man den Halbmesser und den Bogen multiplicirt, und das Produkt halbirt.

Anmerkung. Unter den Buchstaben K, P, d, r u. s. w. oder den durch diese ausgedrückten Größen sind bei der Rechnung die Zahlen zu verstehen, welche man erhält, wenn man die vorkommenden Größen mit gleichem Maße mißt.

§. 197.

Beispiele.

1) Ein kreisförmiger Platz, dessen Durchmesser 35′ beträgt, soll mit 8″ (Dd.) breiten Brettern eingeschlossen werden; wie viel Bretter sind nothwendig?

Auflösung. Die Peripherie des Kreises beträgt:

$$35.\,3^1/_7=\frac{35.22}{7}=5.22=110'.$$

Es sind daher $\frac{110.12}{8}=3.55=165$ Bretter nöthig.

2) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Peripherie 66′ beträgt?

Auflösung. Der Halbmesser ist:

$$\frac{66}{2.\,3^1/_7}=\frac{66.\,7}{2.\,22}=\frac{3.\,7}{2}=10^1/_2'; \text{ oder}$$

$$r=\frac{66}{2.\,3{,}14}=10{,}509'=10'\ 5''\ 0{,}9'''\ \text{Dec.}$$

Anmerkung. Setzt man $\pi=3^1/_7$, so wird die Peripherie etwas zu groß genommen; setzt man aber $\pi=3,\,14$, so wird die

Peripherie etwas zu klein genommen; daher wird bei der Zahl $3^1/_7$ der Halbmesser kleiner, und bei 3,14 größer.

3) Was kostet ein kreisrunder Saal, dessen Durchmesser 3⁰ 6′ Od. beträgt, zu brettern, wenn der Quadratfuß 11 kr. kostet?

Auflösung. Der Flächeninhalt des Saales beträgt:

$$21.21.3^1/_7=(21)^2.{}^{22}/_7=1386\,\square'$$;

folglich betrageu die Kosten:

1386.11 kr.=15246 kr.=254 fl. 6 kr.

4) Es soll in einem Garten ein rechtwinkliges Beet angelegt werden, dessen Flächeninhalt dem eines Kreises, der mit einem Halbmesser von 3′ 6″ Od. beschrieben ist, gleich kommt. Wie breit muß das Beet werden, wenn seine Länge $^3/_4$ der Peripherie betragen soll?

Auflösung. Der Flächeninhalt des Beetes beträgt:

$$42^2.3^1/_7=5544\,\square''=38\,\square'\;72\,\square''\text{ Od.}$$

Die Länge des Beetes beträgt:

$$^3/_4.2.42.3^1/_7=3.3.22=198''\text{ Od.}=16'\;6''.$$

Die Breite des Beetes ist daher:

$$\frac{42^2.3^1/_7}{^3/_4.2.42.3^1/_7}=14.2=28''=2'\;4''\text{ Od.}$$

5) Ein Kreisring, der von zwei koncentrischen Kreisen gebildet wird, wovon der größere Durchmesser 3′, der kleinere 1′ 8″ Od. mißt, soll vergoldet werden; wie hoch kommt die Vergoldung, wenn der Quadratzoll 18 kr. kostet?

Auflösung. Der Flächeninhalt des Ringes beträgt:

$$(18+10).(18-10).3^1/_7=28.8.{}^{22}/_7=704\,\square''$$;

folglich kostet die Vergoldung:

704.18=12672 kr.=211 fl. 12 kr.

6) Ein kreisrunder Platz, dessen Durchmesser 21′ beträgt, ist mit einem Graben umgeben, wovon ein zu einem Mittelpunktwinkel von 20⁰ gehöriger Bogen verschüttet werden soll; welche Länge hat der Bogen?

Auflösung. Nach §. 193 ergiebt sich die Länge:

$$\frac{20.P}{360}=\frac{20.21.3^1/_7}{360}={}^{11}/_3=3^2/_3{}'=3'\;8''\text{ Od.}$$

§. 197.

Lehrsatz. Aehnliche Dreiecke verhalten sich, ihrem Flächeninhalte nach, wie die Quadrate gleich lie-

gender Seiten. Ist z. B. (Fig. 128) $\triangle abc \sim \triangle ABC$, so ist $\triangle abc : \triangle ABC = ca^2 : CA^2 = cb^2 : CB^2 = ab^2 : AB^2$.

Beweis. Man schneide von CA ein Stück $Cd = ca$, von CB ein Stück $Cf = cb$ ab und ziehe df, so ist, weil $\angle dCf = \angle acb$ ist, $\triangle Cdf \cong \triangle cab$, ferner ist (nach §. 165) $df \# AB$.

Zieht man nun aus C auf df eine Senkrechte und verlängert diese, bis sie AB in G trifft, so ist auch $CG \perp AB$ (nach §. 78).

Nach §. 163 ergeben sich folgende Proportionen:

$$CO : CG = Cd : CA \text{ und}$$
$$df : AB = Cd : CA, \text{ daher}$$
$$\overline{CO.df : CG.AB = Cd.Cd : CA.CA}, \text{ hieraus}$$
$$\frac{CO.df}{2} : \frac{CG.AB}{2} = Cd^2 : CA^2.$$

Es ist aber $\frac{CO.df}{2}$ der Inhalt des $\triangle Cdf$ oder $\triangle cab$, und $\frac{CG.AB}{2}$ der Inhalt des $\triangle CAB$.

Ferner ist $Cd = ca$; es folgt demnach

$$\triangle cab : \triangle CAB = ca^2 : CA^2 = cb^2 : CB^2 = ab^2 : AB^2.$$

§. 199.

Lehrsatz. Aehnliche Vielecke verhalten sich ihrem Flächeninhalte nach, wie die Quadrate gleich liegender Seiten oder Diagonalen. Ist z. B. (Fig. 129)

$$abcde \sim ABCDE, \text{ so ist}$$
$$abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2 = be^2 : BE^2 = ed^2 : ED^2 \text{ u. s. w.}$$

Beweis. Zieht man die gleich liegenden Diagonalen be, bd und BE, BD, so erhält man (nach §. 183) ähnliche Dreiecke. Es ist nach dem vorhergehenden §.

$$\triangle abe : \triangle ABE = ab^2 : AB^2 = be^2 : BE^2,$$
$$\triangle bed : \triangle BED = ed^2 : ED^2 = be^2 : BE^2 = ab^2 : AB^2,$$
$$\triangle bcd : \triangle BCD = dc^2 : DC^2 = ed^2 : ED^2 = be^2 : BE^2 = ab^2 : AB^2.$$

Da nun $\triangle abe : \triangle ABE = \triangle bed : \triangle BED = \triangle bcd : \triangle BCD$, so folgt:

$$\triangle abe + \triangle bed + \triangle bcd : \triangle ABE + \triangle BED + \triangle BCD = \triangle abe : \triangle ABE \text{ u. s. w., oder}$$

$$abcde : ABCDE = \triangle abe : \triangle ABE \text{ u. s. w., daher auch}$$

$$abcde : ABCDE = ab^2 : AB^2 = be^2 : BE^2 = ed^2 : ED^2 \text{ u. s. w.}$$

§. 200.

Zusatz. Regelmäßige Figuren abcdef und ABCDEF von gleichviel Seiten (Fig. 130) verhalten sich, wie die Quadrate der Halbmesser (r, R) oder Durchmesser (d, D) der umschriebenen Kreise; denn wegen der Aehnlichkeit dieser Vielecke ist:

$$abcdef : ABCDEF = ab^2 : AB^2.$$

Da aber (nach §. 188)

$$ab : AB = r : R = d : D \text{ ist, so folgt}$$

$$abcdef : ABCDEF = ab^2 : AB^2 = r^2 : R^2 = d^2 : D^2.$$

§. 201.

Zusatz. Kreise verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser, weil dieselben als regelmäßige Vielecke von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachtet werden können.

Beispiele.

1) Wenn das Vergolden eines Kreises, dessen Durchmesser 5″ beträgt, zehn Gulden kostete; wie hoch wird unter sonst gleichen Umständen das Vergolden eines anderen Kreises kommen, dessen Durchmesser 3″ beträgt?

Auflösung. $5^2 : 3^2 = 10 : x$;

$$x = \frac{10.9}{25} = {}^{18}/_{5} = 3\,{}^{3}/_{5} \text{ fl.}$$

2) Wenn ein Stück Feld 400 □° faßt; welchen Flächeninhalt wird ein anderes ähnliches enthalten, wovon eine Seite dreimal so groß ist, als eine gleich liegende des ersteren?

Auflösung. $400\,□^0 : x = 1 : 3^2$;

$$x = 9.400 = 3600\,□^0.$$

§. 202.

Aufgabe. Eine Figur zu beschreiben, welche zweien gegebenen unter sich ähnlichen Figuren ähnlich und im Flächeninhalte gleich ist.

Auflösung und Beweis. Es seien M und N (Fig. 131) die gleich liegenden Seiten zweier ähnlichen Figuren, oder die Halbmesser oder Durchmesser zweier Kreise, welche in eine einzige gleich große und ihnen ähnliche Figur verwandelt werden sollen. Man mache eine Gerade $AC=M$, errichte in A eine Senkrechte $AB=N$ und ziehe CB, so ist CB die gleichliegende Seite der verlangten Figur, oder der Halbmesser oder Durchmesser des gesuchten Kreises.

Bezeichnet man nämlich die Figur über M oder AC mit X, die ihr ähnliche über N oder AB mit Y, und die diesen ähnlichen über CB mit Z, oder die Kreise, deren Halbmesser oder Durchmesser $M=AC$, $N=AB$, ferner CB sind, mit X, Y, Z, so erhält man:

$X:Y=AC^2:AB^2$ (nach §. 199), und hieraus

$X+Y:Y=AC^2+AB^2:AB^2$. Es ist aber auch

$Z:Y=CB^2:AB^2$, daher

$X+Y:Z=AC^2+AB^2:CB^2$.

Da aber (nach §. 143) $CB^2=AC^2+AB^2$ ist, so ist auch

$$Z=X+Y.$$

§. 203.

Zusatz. Aus $Z=X+Y$ folgt:

$$X=Z-Y, \text{ und } Y=Z-X,$$

woraus die Auflösung der Aufgabe sich ergiebt: „Eine Figur zu beschreiben, welche im Flächeninhalte dem Unterschiede zweier unter sich ähnlichen Figuren gleich und diesen ähnlich ist."

Es seien z. B. M und N (Fig. 132) die gleich liegenden

Seiten ähnlicher Figuren X und Y, und es sei die gleich liegende Seite einer ähnlichen Figur zu finden, deren Flächeninhalt dem Unterschiede der gegebenen Figuren gleich komme.

Man mache eine Gerade AB=M, errichte in A eine Senkrechte von unbestimmter Länge, beschreibe aus B mit einem Halbmesser=N einen Kreisbogen, der die unbestimmte Senkrechte in C schneidet, und ziehe BC, so ist AC die gleich liegende Seite der verlangten Figur.

Sind zwei koncentrische Kreise mit den Halbmessern CD und CB (Fig. 133) gegeben, und soll ein Kreis beschrieben werden, dessen Flächeninhalt dem Ringe gleich ist, so errichtet man im Punkte C des Halbmessers CD einen Halbmesser CF des kleineren Kreises senkrecht und beschreibt aus F einen Kreisbogen mit einem Halbmesser = CD, der CD in G schneidet. CG ist alsdann der Halbmesser des Kreises, der im Flächeninhalte dem Ringe, dessen Breite BD ist, gleich kommt.

§. 204.

Zusatz. Sollen drei oder mehre unter sich ähnliche Figuren in eine einzige gleich große und ihnen ähnliche Figur verwandelt werden, so sucht man zuerst (nach §. 202) die Seite einer ähnlichen Figur, welche im Flächeninhalte zweien gegebenen gleich ist, darauf die Seite einer ähnlichen Figur, welche im Flächeninhalte der gefundenen nebst einer dritten von den gegebenen Figuren gleich ist, u. s. w.

Hiermit ist auch die Aufgabe übereinstimmend: „Eine Figur zu beschreiben, welche zwei-, drei-, vier- u. s. w. mal so groß, als eine gegebene, und dieser ähnlich ist," weil dieß auch so ausgedrückt werden kann:

Es sollen zwei, drei, vier u. s. w. gleiche und unter sich ähnliche Figuren in eine einzige ihnen ähnliche von gleichem Flächeninhalte verwandelt werden.

§. 205.

Aufgabe. Eine Figur zu beschreiben, die im Flächeninhalte einem bestimmten Theile einer gegebenen gleich kommt und derselben ähnlich ist. Es soll z. B. ein Fünfeck gebildet werden, das dem Flächeninhalte nach $\frac{1}{3}$ vom Fünfeck ABCDE (Fig. 134) beträgt und diesem ähnlich ist.

Auflösung. Man theile eine Seite AB des gegebenen Fünfecks in 3 gleiche Theile Af, fg, gB, beschreibe über AB den Halbkreis und errichte im Punkte f der Seite AB die Senkrechte fK und ziehe die Sehne AK, so ist AK die Seite des verlangten Vielecks. Errichtet man über dieser Seite ein dem gegebenen ähnliches Fünfeck, das wir mit X bezeichnen wollen, so wird dieses im Flächeninhalte den dritten Theil von ABCDE betragen.

Beweis. Man ziehe KB, so ist $\angle$AKB als Winkel im Halbkreise = R, folglich $\triangle$AKB rechtwinklig. Nach §. 154 ist nun $AK^2 : AB^2 = Af : AB = 1 : 3$.

Da aber auch (nach §. 199)

$$X : ABCDE = AK^2 : AB^2 \text{ ist, so folgt auch}$$

$$X : ABCDE = Af : AB = 1 : 3.$$

Theilt man von A aus das gegebene Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke und zieht durch h die Gerade hl ‡ BC, ferner lm ‡ CD und mn ‡ DE, so ist Ahlmn die verlangte Figur; denn sie ist (nach §. 184) dem gegebenen Fünfecke ähnlich, und nach dem geführten Beweise der dritte Theil desselben.

Man kann auch obige Aufgabe so ausdrücken:

Es soll von einer gegebenen Figur ein bestimmter Theil abgeschnitten werden, der dem Ganzen ähnlich ist.

Soll ein Kreis beschrieben werden, dessen Flächeninhalt einem bestimmten Theile eines gegebenen gleich kommt, so verfährt man auf gleiche Weise, und hat nur das angegebene Verfahren auf den Halb- oder Durchmesser anzuwenden, da

Kreise sich dem Flächeninhalte nach wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser verhalten.

Hieraus folgt auch die Auflösung der Aufgaben:

„Eine gegebene geradlinige Figur durch Parallelen in eine beliebige Zahl gleicher oder proportionirter Theile abzutheilen," und — „einen Kreis in gleiche oder proportionirte Theile durch koncentrische Kreise abzutheilen."

§. 206.

Aufgabe. Eine Figur zu beschreiben, welche dem Flächeninhalte nach um irgend eine Anzahl Theile größer, als eine gegebene, und dieser ähnlich ist.

Es sei z. B. ein Kreis zu beschreiben, dessen Flächeninhalt um den dritten Theil größer ist, als der aus O mit dem Halbmesser OB beschriebene Kreis (Fig. 135).

Auflösung und Beweis. Man ziehe eine Gerade DC, theile diese in 4 gleiche Theile Df, fg, gh, hC, beschreibe über DC den Halbkreis, errichte in f die Senkrechte fE und ziehe die Sehne EC. Ist nun EC der Seite der gegebenen Figur, oder dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich, so ist DC die Seite der verlangten Figur, oder der Halbmesser des gesuchten Kreises; denn es ist

$$EC^2 : DC^2 = Cf : CD = 3 : 4.$$

Da nun auch (nach §. 201)

$$Kr.EC : Kr.DC = EC^2 : DC^2 \text{ ist, so folgt:}$$

$$Kr.EC : Kr.DC = 3 : 4 = 1 : 1\tfrac{1}{3}.$$

Ist aber EC der gegebenen Geraden (wie hier OB) nicht gleich, so trägt man diese auf EC auf (ist EC zu klein, so wird sie genugsam verlängert), so, daß EL=OB ist, und zieht durch L mit DC eine Parallele, welche die ED oder deren Verlängerung in K schneidet. LK ist alsdann entweder die gleich liegende Seite der verlangten ähnlichen Figur, oder der Halbmesser des gesuchten Kreises; denn

$EL^2 : LK^2 = LN : LK$, ferner
$EL : LN = EC : Cf$ und
$EL : LK = EC : CD$, woraus
$LN : LK = Cf : CD$, folglich
$EL^2 : LK^2 = Cf : CD = 3 : 4 = 1 : 1\frac{1}{3}$, und
Kr. EL : Kr. LK = 3 : 4.

Zieht man nun mit OG = LK einen Kreis, so ist sein Flächeninhalt um den dritten Theil größer.

Nach dieser Aufgabe kann auch eine Figur gemacht werden, welche einer gegebenen ähnlich und im Flächeninhalte zwei=, drei= u. s. w. mal so groß ist, als dieselbe.

§. 207.

Lehrsatz. Zieht man aus der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse eine Senkrechte, so wird dadurch das Dreieck in zwei Dreiecke getheilt, welche unter sich und dem ganzen Dreiecke ähnlich sind; ferner ist die gezogene Senkrechte die mittlere Proportionallinie zwischen beiden Abschnitten der Hypotenuse. Ist z. B. (Fig 136)

$\angle ABC = R$ und $BD \perp AC$, so ist
$\triangle ABD \sim \triangle ABC$,
$\triangle BDC \sim \triangle ABC$ und
$\triangle ABD \sim \triangle BDC$, ferner
$AD : BD = BD : DC$.

Beweis. $\triangle ABD$ und $\triangle ABC$ sind rechtwinklig und haben $\angle m$ gemeinschaftlich; es ist daher auch $\angle ABD = \angle BCA$, folglich $\triangle ABD \sim \triangle ABC$.

Eben so haben $\triangle BDC$ und $\triangle ABC$ außer einem rechten Winkel noch $\angle n$ gemeinschaftlich; es muß daher

$\angle DBC = \angle BAC$ und

$\triangle BDC \backsim \triangle ABC$ sein, also ist auch

$\triangle ABD \backsim \triangle BDC$.

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt:

$AD:BD = BD:DC$, woraus sich ergiebt:

$AD.DC = BD.BD$, oder

$AD.DC = BD^2$.

§. 208.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Geraden M und N (Fig. 137) die mittlere Proportionale zu finden.

Auflösung und Beweis. Man mache eine Gerade $AB = M$, ihre Verlängerung $BC = N$, beschreibe über AC den Halbkreis und errichte in B die Senkrechte BD, so ist diese die verlangte Linie; denn zieht man die Sehnen AD, CD, so ist $\triangle ADC$ rechtwinklig, weil $\angle ADC$ ein Peripheriewinkel im Halbkreise ist; es ist daher nach vorhergehendem §.

$AB:DB = DB:BC$, oder

$M:DB = DB:N$, daher

$AB.BC = DB.DB$ oder

$M.N = DB.DB = DB^2$.

§. 209.

Zusatz. Betrachtet man die gegebenen Geraden M und N als Grundlinie und Höhe eines Parallelogramms oder Dreiecks, so giebt (nach §. 152) das Produkt aus M und N den Flächeninhalt des Parallelogramms, und, wenn man von einer der Dimensionen die Hälfte nimmt, den Flächeninhalt des Dreiecks (nach §. 156).

Soll nun ein Parallelogramm in ein gleich großes Quadrat verwandelt werden, so hat man nur zu seiner Grundlinie und Höhe die mittlere Proportionale zu suchen, welche die Seite des verlangten Quadrats ist.

Hat man aber ein Dreieck in ein gleich großes Quadrat zu verwandeln, so sucht man zu seiner Grundlinie und halben Höhe, oder zu seiner halben Grundlinie und ganzen Höhe die mittlere Proportionale.

§. 210.

Zusatz. Da man (nach §. 142) jedes Vieleck in ein gleich großes Dreieck, dieses aber, wie oben gezeigt wurde, in ein gleich großes Quadrat verwandeln kann, so läßt sich auch jedes Vieleck in ein gleich großes Quadrat verwandeln, welches Verwandeln die Quadratur der Figuren heißt.

Von der Berechnung der wichtigsten geometrischen Körper und ihrer Oberflächen.

Von der Eintheilung der Körper.

§. 211.

Ein geometrischer Körper ist ein nach allen Seiten begrenzter Raum, oder ein Raum, welcher eine bestimmte Länge, Breite und Höhe hat. Die Grenze des Körpers bilden ebene und krumme Flächen.

Der Durchschnitt zweier Flächen heißt Kante.

Drei oder mehr in einem Punkte zusammenkommende Ebenen bilden ein Eck oder einen Körperwinkel.

Die Ecke heißen drei=, vier=, fünf= . . . flächig, je nachdem sie von drei, vier, fünf . . . Flächen gebildet werden. Weniger als drei Ebenen können kein Eck bilden.

An den Ecken unterscheidet man die Linienwinkel, welche von zwei angrenzenden Kanten gebildet werden, und die Kantenwinkel, welche die Neigung zweier sich schneidenden Ebenen sind.

Die Körper, welche von lauter Ebenen begrenzt sind, heißen platt oder eckig (Polyeder).

Da wenigstens drei Ebenen nothwendig sind, um ein Eck zu bilden, und noch eine Ebene, um die Oeffnung zu schließen, so können weniger als vier Ebenen keinen eckigen Körper bilden.

Die Körper, welche von krummen Flächen begrenzt sind, heißen rund oder gewölbt, und zwar konvex oder erhaben gewölbt, wenn der höchste Punkt der Wölbung dem betrachtenden Auge näher liegt, als die übrigen Punkte der Wölbung; hingegen konkav oder hohl gewölbt, wenn der höchste Punkt der Wölbung dem betrachtenden Auge entfernter liegt, als die übrigen Wölbungspunkte, wie z. B. die Wölbung der Keller, Schwibbögen u. s. w.

Ist ein Körper von einer einzigen krummen Fläche begrenzt, so heißt er ganz rund, sonst zum Theile rund.

An der Begrenzung der Körper unterscheidet man ferner Grundflächen und Seitenflächen.

Grundfläche wird diejenige genannt, über welcher man sich den Körper errichtet denkt. Hat der Körper unter seinen Begrenzungsflächen zwei kongruente und parallele (überall gleich weit von einander abstehende) Ebenen, so heißen beide seine Grundflächen.

Die Senkrechte zwischen diesen beiden Grundflächen oder deren Verlängerung heißt die Höhe des Körpers.

Hat der Körper nur eine Grundfläche, so heißt das Eck, welches der Grundfläche gegenübersteht, die Spitze desselben, und die Senkrechte von der Spitze bis auf die Grundfläche oder deren Verlängerung heißt die Höhe eines solchen Körpers.

Diejenigen Flächen, welche zwischen den beiden Grundflächen, oder zwischen der Spitze und der Grundfläche

liegen, und den Körper vollends begrenzen, heißen die Seitenflächen desselben.

Von der Körpermessung.

§. 212.

Körper messen oder den körperlichen Inhalt (Solidität) derselben bestimmen, heißt angeben, wie oft ein als Einheit angenommenes Maß in dem Körper enthalten ist. Dieses Maß muß wieder ein Körper sein, weil nur gleichartige Größen mit einander verglichen werden können. Zu einem solchen Maße wird gewöhnlich ein von sechs gleichen Quadraten begrenzter Körper, welcher Würfel oder Kubus heißt, genommen. Ein Würfel (Kubus), dessen Seite (Kante) eine Ruthe, einen Fuß, einen Zoll u. s. w. lang ist, heißt Kubikruthe, Kubikfuß, Kubikzoll u. s. w.

Kann man nun z. B. den Kubikfuß in einen Körper 24mal hineinstellen, so daß sein ganzer Raum ausgefüllt wird, so wird man sagen, der Inhalt des Körpers betrage 24 Kubikfuß. Aber in den wenigsten Fällen ist es möglich, einen Körper mit Würfeln auszufüllen; daher lehrt die Geometrie, wie man den kubischen Inhalt eines Körpers schon, durch bloße Messung seiner einzelnen Ausdehnungen (Dimensionen) mittels des Längenmaßes, findet.

Vom Prisma.

§. 213.

Ein Prisma ist ein solcher Körper, welcher zwei kongruente und parallele Vielecke zu Grundflächen, und so viel

Parallelogramme, als eine der Grundflächen Seiten zählt, zu Seitenflächen hat.

Die Kanten, welche an den Grundflächen liegen, heißen Grundkanten, die Kanten aber zwischen zwei anstoßenden Parallelogrammen Seitenkanten.

Ein Prisma heißt senkrecht, wenn die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen; alsdann ist jede dieser Kanten die Höhe des Prisma. In jedem andern Falle heißt das Prisma schief, und seine Höhe ist die zwischen den Grundflächen gezogene Senkrechte. Ein Prisma heißt drei-, vier-, fünf-...seitig, oder drei-, vier-, fünf-...eckig, je nachdem eine Grundfläche desselben ein Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w. ist.

Ein Prisma, dessen Grundflächen gleichfalls Parallelogramme sind, das also von lauter Parallelogrammen eingeschlossen ist, heißt Parallelepipedum. Sind alle Parallelogramme Rechtecke, so heißt das Parallelepipedum rechteckig. Sind alle Parallelogramme Quadrate, so heißt dasselbe Kubus oder Würfel.

Sehr viele im Leben vorkommende Körper sind Parallelepipeda, z. B. Mauern, zugehauene Balken, Quadersteine, Wassersteine u. s. w.

Der Körperinhalt eines Prisma wird gefunden, wenn man den Inhalt einer Grundfläche nach Anweisung über Berechnung des Flächeninhalts ebener Figuren sucht, und die erhaltene Zahl mit jener multiplicirt, welche die gemessene Höhe des Prisma angiebt. Das gefundene Produkt zeigt die im Prisma enthaltenen Kubikfuße oder Kubikzolle u. s. w. an, je nachdem man die einzelnen Dimensionen dieses Körpers nach Fußen oder Zollen u. s. w. gemessen hat. (Die Dimensionen müssen aber hierbei stets mit einerlei Längenmaß gemessen werden.)

Kürzer drückt man sich so aus:

Der Inhalt eines Prisma wird erhalten, wenn man die Grundfläche (G) mit der Höhe (H) multiplicirt, nämlich = G.H.

Die Grundfläche eines Prisma wird daher gefunden, wenn man den Körperinhalt durch die Höhe theilt, und die Höhe wird erhalten, wenn man den Körperinhalt durch die Grundfläche theilt.

Da in einem rechteckigen Parallelepipedum die Grundfläche ein Rechteck ist, und die Seitenkanten senkrecht auf derselben stehen, so ergiebt sich der kubische Inhalt eines solchen Körpers, wenn man Länge, Breite und Höhe mit einander multiplicirt, weil die Grundfläche (nach §. 151) dem Produkte aus Länge und Breite gleich ist. Es ist daher der Körperinhalt eines rechteckigen Parallelepipedums (der Kürze wegen: r. Pdm.) dem Produkte aus Länge (L), Breite (B) und Höhe (H) gleich, nämlich:

r. Pdm.=L. B. H.

Der Würfel oder Kubus kann auch als rechteckiges Parallelepipedum betrachtet werden, dessen Länge, Breite und Höhe einander gleich sind. Man erhält folglich den Inhalt des Kubus (K), wenn man eine Seite oder Kante (S) desselben zweimal mit sich selbst multiplicirt, d. i. dreimal als Faktor ansetzt, also:

$$K=S.\ S.\ S=S^3.$$

Um die Begrenzungsflächen des Prisma zu berechnen, verfährt man nach §. 151—§. 160.

Beispiele.

1) Wie groß ist der Körperinhalt eines 3′ 4″ Dd. hohen Prisma, dessen Grundfläche 1½□′ beträgt?

2) Eine Mauer ist 80′ lang, 9′ hoch und 2′ dick; wie groß ist der Inhalt derselben?

3) Ein senkrechtes Prisma hat zur Grundfläche ein Quadrat, dessen Seite 1′ 8″ beträgt. Wenn nun eine Seitenkante 4′ 6″ lang ist;

a) wie viel Kubikfuß enthält das Prisma, und

b) wie viel Quadratfuß die gesammte Oberfläche?

4) Die Grundfläche eines senkrechten Prisma ist ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck, wovon eine der gleichen Seiten 3′ mißt. Wenn nun die Höhe des Prisma 10′ beträgt; wie groß ist der Körperinhalt desselben?

5) Die Seite eines Würfels ist 3′ 4″ lang; wie groß ist dessen Körperinhalt und Oberfläche?

6) Der Körperinhalt eines Prisma beträgt 126c′, seine Grundfläche 21□′; wie hoch ist dasselbe?

7) Der Körperinhalt einer Mauer beträgt 1100c′; wenn nun dieselbe 1′ 10″ dick und 8′ hoch ist; wie lang wird sie sein?

8) Ein 10′ 5″ hohes Prima faßt 90c′. Wie groß ist die Grundfläche?

9) Wie schwer ist ein 24′ langer Balken, dessen Grundflächen gleiche Quadrate sind, wovon eine Seite 1′ 2″ mißt, wenn ein Kubikfuß Wasser $44^{17}/_{100}$ bayr. Pfund wiegt, und ein Kubikfuß Holz im Gewichte nur 0,8 ($^{8}/_{10}$) von einem gleichen Volumen Wasser beträgt?

10) Wie schwer ist ein Würfel von Marmor, dessen Kante 3′ 4″ mißt, wenn der Marmor 2,8 ($2^{4}/_{5}$) mal so schwer ist, als Wasser?

11) Ein Wasserbehälter von Marmor in Gestalt eines viereckigen senkrechten Prisma ist außen 4′ lang, 3′ breit und 2′ hoch. Die Wände sind 4″ Dc. dick.

a) Wie viel bayrische Maßkannen faßt dieser Behälter, wenn eine bayr. Maßkanne 43 Decimalkubikzoll enthält?

b) Wie schwer ist der Behälter selbst?

12) Wie tief muß ein Behälter in Gestalt eines viereckigen senkrechten Prisma werden, wenn derselbe zwei bayrische Schenkeimer (à 60 Maß) fassen soll, und seine innere Länge 2′ 4″ Dc., die innere Breite 1′ 8″ Dc. beträgt?

Vom Cylinder.

§. 214.

Der Cylinder (Walze) ist ein Körper, welcher von zwei gleichen und parallelen Kreisen als Grundflächen und von einer einzigen krummen Fläche als Seitenfläche der Art begrenzt wird, daß alle, von der einen Peripherie zur andern parallel mit der Verbindungslinie der Kreismittelpunkte gezogenen, Geraden ganz in ihr liegen. Eine solche gerade Linie heißt Seite des Cylinders. Die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden parallelen Kreise verbindet, heißt Axe des Cylinders. Steht diese senkrecht auf den Grundflächen, so ist sie zugleich die Höhe desselben, und der Cylinder heißt ein senkrechter, in jedem anderen Falle ein schiefer.

Sehr viele im Leben vorkommende Körper haben die vollkommene Gestalt eines Cylinders, z. B. Getreide- und Getränkmaße, runde Scheiben und Stäbe, Röhren, Wellbäume u. s. w.

Der Cylinder kann als ein Prisma von unendlich vielen Seiten betrachtet werden, wenn man seine Grundflächen (nach §. 142, 11) als regelmäßige Vielecke annimmt. Die krumme Seitenfläche besteht alsdann aus unendlich vielen Parallelogrammen, deren Grundlinien zusammen die Peripherie der Grundfläche ausmachen.

Hieraus folgt die Berechnung des Körperinhaltes und der krummen Seitenfläche des Cylinders, nämlich: Der Körperinhalt des Cylinders (C) ist dem Produkte aus Grundfläche und Höhe gleich. Wird der Halbmesser der Grundfläche mit R und die Höhe mit H bezeichnet, so giebt $R^2\pi.H$ den Inhalt des Cylinders.

Man findet die Grundfläche, wenn man den Inhalt des Cylinders durch die Höhe theilt, und die Höhe, wenn man den Inhalt des Cylinders durch die Grundfläche theilt.

Der Inhalt der krummen Seitenfläche eines senkrechten Cylinders wird erhalten, wenn man die Peripherie der einen Grundfläche mit der Seite oder Höhe des Cylinders multiplicirt.

Bezeichnet man wieder den Halbmesser der Grundfläche mit R und die Höhe des Cylinders mit H, so giebt $2R\pi.H$ die Seitenfläche des Cylinders.

Um den Körperinhalt des Stoffes, woraus eine Röhre besteht, zu finden, denkt man sich zwei Cylinder, wovon den größeren die ganze Röhre, den kleineren aber der lichte Raum bildet. Die Differenz beider Cylinder ist dem Inhalte des Stoffes gleich. Der Körper aber, welcher dem Unterschiede beider Cylinder gleich ist, hat zur Grundfläche einen Kreisring und zur Höhe die Länge der Röhre. Es wird daher der Inhalt dieses Körpers gefunden, wenn man den Flächeninhalt des Kreisringes (nach §. 193) berechnet, und die erhaltene Zahl mit der Länge der Röhre multiplicirt.

Beispiele.

1) Wie groß ist der Körperinhalt und die gesammte Oberfläche eines Cylinders, wenn der Durchmesser 2′ und die Höhe 3′ beträgt?

" " "	4′	" " " 7′	" ?
" " "	1′ 8″ Dc.	" " " 15′	" ?
" " "	6″ Dd.	" " " 20′	" ?

2) Wie hoch ist ein Cylinder, dessen Durchmesser 4′, und dessen Körperinhalt 88c′ beträgt?

3) Der Körperinhalt eines Cylinders beträgt 165c′, und seine Höhe 11′; wie viel Quadratfuß enthält eine der Grundflächen?

4) Wie groß ist der Körperinhalt eines Cylinders, dessen Umfang 4′ 7″ Dd. und dessen Höhe 10′ beträgt?

5) Wie viel bayr. Maß faßt ein cylinderförmiger Behälter, der 2′ tief ist, und dessen Durchmesser 3′ beträgt, wenn die bayr. Maßkanne 43 Decimalkubikzoll enthält?

6) Eine Granit-Säule ist 14′ hoch, und ihr Umfang beträgt 5′ 6″ Dd.,

a) Wie schwer ist diese Säule, wenn ein Kubikfuß von Granit

2, 6 ($2^3/_5$)mal so schwer ist, als ein Kubikfuß Wasser, welcher $44^{17}/_{100}$ Pfund wiegt?

b) Wie hoch kommt das Anstreichen der krummen Fläche mit einer Oelfarbe, wovon der Quadratfuß 4 kr. kostet?

7) Wie tief muß ein steinerer Behälter von der Gestalt eines Cylinders, dessen Durchmesser 2′ 4″ Dd. beträgt, werden, wenn der Behälter 60 bayr. Maß fassen soll?

8) Wie viel bayr. Schäffel faßt ein Silo von 12′ Höhe und 6′ Durchmesser, in Cylinder gebaut, wenn ein bayr. Schäffel 8944 Decimalkubikzoll enthält?

9) Eine hölzerne Röhre ist 21′ lang und 2″ Dc. dick; der innere Durchmesser ist 7″ Dc.; wie viel Kubikfuß enthält die Röhre?

10) Ein cylinderförmiger eisener Ofen ist 4′ hoch und 4‴ Dc. dick; der innere Durchmesser beträgt 1′ 4″ Dc.; wie viel Kubikfuß Eisen enthält er?

Von der Pyramide.

§. 215.

Eine Pyramide (Spitzsäule) ist ein solcher Körper, welcher ein Vieleck zur Grundfläche und so viel in einem Punkte zusammenstoßende Dreiecke, als die Grundfläche Seiten zählt, zu Seitenflächen hat.

Eine Pyramide heißt drei-, vier-, fünf- . . . seitig, je nachdem die Grundfläche ein Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w. ist.

Dem Körperinhalte nach ist die Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe. Der Inhalt einer Pyramide (Pyr.) ist, wie man sich kurz ausdrückt, dem dritten Theile des Produkts aus Grundfläche (G) und Höhe (H) gleich, also Pyr. $= \frac{1}{3}$ G H.

Die Grundfläche wird erhalten, wenn man den Körperinhalt dreimal nimmt, und das Produkt durch die Höhe theilt. Die Höhe ergiebt sich, wenn man den dreifachen Körperinhalt durch die Grundfläche theilt.

Bei Berechnung der Begrenzungsflächen der Pyramide verfährt man wieder nach §. 151 — §. 160.

Beispiele.

1) Wie groß ist der Inhalt einer 8′ hohen Pyramide, wenn die Grundfläche ein Dreieck ist, dessen Grundlinie 3′, und dessen Höhe 2′ beträgt?

2) Wenn die Grundfläche einer 15′ hohen Pyramide ein Quadrat ist, dessen Seite 3′ 8″ Dd. mißt; wie groß ist der körperliche Inhalt?

3) Eine 6′ hohe Pyramide hat ein Rechteck zur Grundfläche, das 4′ 5″ Dc. lang und 2′ 8″ Dc. breit ist; wie groß ist der Körperinhalt?

4) Wie groß ist die Grundfläche einer Pyramide, deren Höhe 10′, und deren Körperinhalt 250c′ beträgt?

5) Wie hoch ist eine Pyramide, deren Körperinhalt 80c′ beträgt, und deren Grundfläche ein Dreieck ist, dessen Grundlinie 1′ 8″ Dd. und dessen Höhe 3′ 4″ Dd. mißt?

6) Der Körperinhalt einer 5′ hohen Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck ist, beträgt 36c′. Wie lang ist das Rechteck, wenn dasselbe 8″ Dd. breit ist?

Vom Kegel.

§. 216.

Ein Kegel ist ein solcher Körper, welcher einen Kreis zur Grundfläche und eine einzige krumme in einer Spitze zusammenlaufende Fläche zur Seitenfläche hat. Diese muß die Eigenschaft haben, daß alle Geraden, die von der Spitze zur Peripherie der Grundfläche gezogen werden, ganz in ihr liegen. Eine solche Gerade wird Seite des Kegels genannt, und die Gerade, welche man von der Spitze auf den Mittelpunkt der Grundfläche gezogen denkt, heißt Axe des Kegels. Steht diese senkrecht auf der Grundfläche, so ist sie zugleich die Höhe des Kegels, und dieser heißt ein senkrechter, in jedem andern Falle ein schiefer.

Der Kegel kann als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachtet werden, wenn man den Kreis als regelmäßiges Vieleck (nach §. 142, 11) annimmt. Die krumme Seitenfläche des Kegels besteht alsdann aus unendlich vielen in einer Spitze zusammenlaufenden Dreiecken, deren Grundlinien zusammen die Peripherie der Grundfläche ausmachen.

Der Körperinhalt des Kegels ist daher dem dritten Theile des Produkts aus Grundfläche und Höhe des Kegels gleich. Bezeichnet R den Halbmesser der Grundfläche und H die Höhe des Kegels, so ist der kubische Inhalt desselben $= \frac{R^2\pi.H}{3}$, d. h. der Körperinhalt des Kegels wird erhalten, wenn man den Halbmesser mit sich selbst, dann noch mit $3^1/_7$ und mit der Höhe multiplicirt, endlich das Produkt aus diesen Faktoren durch 3 dividirt.

Beim senkrechten Kegel ist die Höhe der Dreiecke, aus denen man die krumme Fläche bestehend denken kann, gleich. Der Inhalt sämmtlicher Dreiecke oder der krummen Seitenfläche ist daher dem halben Produkte aus der Peripherie der Grundfläche und der Seite des Kegels gleich. Bezeichnet man wieder mit R den Halbmesser und mit S die Seite, so ist die krumme Fläche $= S.R\pi$; d. h. der Inhalt der Seitenfläche wird erhalten, wenn man den Halbmesser mit $3^1/_7$ und noch mit der Seite des Kegels multiplicirt.

Beispiele.

1) Wie groß ist der Körperinhalt eines Kegels, wenn seine Höhe 2′ und der Durchmesser der Grundfläche 1′ beträgt?
" 5′ " " " " " 4′ " ?
" 1′ " " " " " 7″ Dc. " ?

2) Die Höhe eines Kegels beträgt 3′ 5″ Dc., sein Körperinhalt 70c′, wie groß ist die Grundfläche?

3) Der Inhalt eines Kegels beträgt 22c', sein Durchmesser 2' 4'' Dd., wie hoch ist der Kegel?

4) Wenn der Durchmesser eines Kegels 4' 2'' Dc. beträgt, und die Seite 6' lang ist; wie groß ist der Inhalt der krummen Fläche?

5) Die Seite eines Kegels ist 8'' Dd. lang, und die Peripherie der Grundfläche mißt 2', wie groß ist der Inhalt der Seitenfläche?

6) Das kegelförmige Dach eines Thurmes soll mit Kupfer gedeckt werden. Wie hoch kommt die Bedeckung, wenn der Durchmesser 7', die Länge des Daches oder die Seite des Kegels 4' beträgt, und der Quadratfuß auf 54 kr. kommt?

Von der abgekürzten Pyramide und dem abgekürzten Kegel.

§. 217.

Wird die Pyramide, oder der Kegel parallel zur Grundfläche durchschnitten, so heißt der zwischen den parallelen Ebenen enthaltene Theil abgekürzte Pyramide, oder abgekürzter Kegel (Stumpf). Die Entfernung der beiden parallelen Ebenen wird die Höhe des Körpers genannt.

Hinsichtlich des Körperinhaltes kann die abgekürzte Pyramide, wenn nicht besondere Genauigkeit erfordert wird, als ein Prisma von der Höhe des abgekürzten Körpers betrachtet werden, wobei aber eine Grundfläche nur die halbe Summe der beiden parallelen Ebenen beträgt. In gleichem Falle kann der abgekürzte Kegel als ein Cylinder von der Höhe des Stumpfes betrachtet werden, wobei aber eine Grundfläche der halben Summe der beiden parallelen Kreise gleich kommt. Der Körperinhalt der abgekürzten Pyramide, oder des abgekürzten Kegels wird hiernach erhalten, wenn man die Höhe mit der halben Summe der beiden parallelen Ebenen multiplicirt.

Wird aber Genauigkeit in der Berechnung eines solchen Körpers erfordert, so wird für den Inhalt desselben der Inhalt dreier Pyramiden, oder dreier Kegel berechnet, die alle die Höhe des Körpers haben, deren Grundflächen aber die parallelen Ebenen selbst und die mittlere Proportionalfläche aus diesen beiden sind.

Jedoch wird der Inhalt des abgekürzten Kegels leichter gefunden, wenn man die Summe der Halbmesser beider parallelen Kreise ins Quadrat erhebt, d. i. mit sich selbst multiplicirt, dann hiervon das Produkt beider Halbmesser abzieht, ferner den erhaltenen Rest mit der Höhe und noch mit 22 multiplicirt, und endlich dieses Produkt durch 21 dividirt.

Die Oberfläche der abgekürzten Pyramide wird nach §. 151 — §. 160 berechnet. Da aber die krumme Fläche des Stumpfes von einem senkrechten Kegel aus unendlich vielen Trapezen bestehend gedacht werden kann, welche sämmtlich gleiche Höhe, d. i. die Gerade von einem Punkte der oberen Peripherie an die untere, haben: so wird der Inhalt der krummen Fläche des Stumpfes erhalten, wenn man die Seite des Stumpfes mit der halben Summe der beiden Peripherien multiplizirt, oder wenn man die Summe beider Halbmesser mit der Seite des Stumpfes und noch mit $3\frac{1}{7}$ multiplicirt. Bezeichnet man den größeren Halbmesser mit R, den kleineren mit r und die Gerade von einem Punkte der einen Peripherie zur andern, d. i. die Seite mit S, so ist die krumme Fläche $= (R+r).S.3\frac{1}{7}$.

Beispiele.

1) Die Höhe eines abgekürzten Kegels beträgt 12′, der eine Durchmesser 3′, der andere 1′. Wie groß ist der Inhalt des Körpers?
2) Ein Kegel hat eine Höhe von 5′ 6″ Dd., der Durchmesser beträgt 2′ 1″ Dd. Er wird bei der halben Höhe parallel zur Grundfläche durchschnitten, wie groß ist jeder Theil seinem Inhalte nach?
3) Ein Baumstamm ist 42′ lang, der eine Durchmesser beträgt 1′ 2″

Dd., der andere 7″ Dd.; wie viel Kubikfuß Holz enthält derselbe?

4) Ein 36′ langer Baumstamm hat an seinem dicksten Ende 2′ 1″ Dc. Durchmesser, am entgegengesetzten Ende 1′ 4″ Dc. Wie viel Klafter Holz wird dieser Baum geben, wenn 112 Kubikfuß Holz 1 Klafter geben (d. h. wenn 112c′ Holz gespalten 126c′ Raum einnehmen)?

5) Wie viel Eimer (à 60 Maß) hält ein Wasserständer, dessen unterer Durchmesser 3′ 6″ Dd., und dessen oberer Durchmesser 2′ 4″ Dd. beträgt? Die Tiefe des Ständers ist 4′.

6) Wie hoch kommt das Vergolden der krummen Fläche eines abgekürzten Kegels, wobei der eine Durchmesser 5″ Dc., der andere 3″ Dc. und die Seite 1′ beträgt, wenn der Quadratzoll 24 kr. kostet?

Von der Kugel.

§. 218.

Die Kugel ist ein Körper, der von einer krummen Fläche so begrenzt wird, daß jeder Punkt derselben von einem innerhalb des Körpers liegenden Punkte, dem Mittelpunkte, gleichweit entfernt ist. Jede Gerade, welche vom Mittelpunkte an einen Punkt der Oberfläche gezogen wird, heißt Kugelhalbmesser, und jede Gerade, welche zwei Punkte der Oberfläche verbindet und durch den Mittelpunkt geht, heißt Kugeldurchmesser. Jeder Kreis auf der Kugel, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt, heißt ein größter Kugelkreis.

Der Körperinhalt einer Kugel ist zwei Drittheilen eines Cylinders gleich, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich kommt. Der Kugelinhalt (K) wird gefunden, wenn man den Halbmesser dreimal als Faktor nimmt, und dieses Produkt mit 4 und π ($3^1/_7$ oder 3,14) multiplicirt, endlich das ganze Produkt durch 3 dividirt.

Bezeichnet R den Halbmesser einer Kugel, so ist ihr Körperinhalt (K)

$$\frac{4R.R.K.\pi}{3}=\frac{4R^3}{3}\pi.$$

Setzt man statt π die Zahl $3\frac{1}{7}$ oder $\frac{22}{7}$, so ist

$$K=\frac{88R^3}{21}.$$

Die Oberfläche (0) der Kugel ist viermal so groß, als ein größter Kugelkreis, daher $0=4R.R.\pi=4R^2\pi$, d. h. die Oberfläche wird erhalten, wenn man den Halbmesser mit sich selbst multiplicirt, und das Produkt noch mit 4 und $3\frac{1}{7}$ (3,14) multiplicirt.

Setzt man wieder $\frac{22}{7}$ für π, so erhält man:

$$0=\frac{88R^2}{7}.$$

Beispiele.

1) Wie groß ist der Körperinhalt und die Oberfläche einer Kugel,

wenn	der	Durchmesser	1′		beträgt?
"	"	"	3′		" ?
"	"	"	1′ 2″	Dd.	" ?
"	"	"	4′ 8″	Dd.	" ?
"	"	"	2′ 1″	Dc.	" ?
"	"	"	3′ 5″	Dc.	" ?
"	"	"	7″	Dd.	" ?
"	"	"	9″	Dc.	" ?

2) Ein Metallarbeiter soll eine hohle Kugel von Messingblech machen, deren Durchmesser 2′ beträgt; wie viel Quadratzoll Blech braucht er?

3) Eine steinerne Kugel, deren Durchmesser 2′ 4″ Dd. beträgt, soll mit Farbe überstrichen werden; wie viel kostet das Anstreichen, wenn der Quadratfuß $5\frac{1}{2}$ kr. kostet?

4) Wie viel Maß Wasser faßt ein kugelförmiges Gefäß, dessen innerer Durchmesser 7″ Dc. beträgt, wenn die bayr. Maßkanne 43 Decimalkubikzoll enthält?

5) Wie viel wiegt eine massive Kugel von Eisen, deren Durchmesser

8″ Dd. beträgt, wenn das Eisen 7,7mal so schwer ist, als ein gleiches Volumen Wasser?

6) Wie hoch kommt die Bedeckung der halbkugelförmigen Kuppel eines Thurmes mit Kupfer, wenn die Kuppel einen Durchmesser von 14′ hat, und der Quadratfuß 1 fl. 6 kr. kostet?

Von den regelmäßigen eckigen Körpern (Polyedern).

---

§. 219.

Ein eckiger Körper heißt regelmäßig oder regulär, wenn alle seine Ebenen gleiche und regelmäßige Vielecke, und alle seine Ecke unter sich gleich sind. Es giebt fünf regelmäßige eckige Körper:

1) Das reguläre Tetraeder, von vier gleichseitigen Dreiecken umschlossen, von denen je drei in einem Eck zusammenstoßen.

2) Das reguläre Oktaeder, von acht gleichseitigen Dreiecken umschlossen, von denen je vier in einem Eck zusammen stoßen.

3) Das reguläre Ikosaeder, von zwanzig gleichseitigen Dreiecken umschlossen, von denen je fünf in einem Eck zusammenstoßen.

4) Das reguläre Hexaeder oder der Würfel, welcher von sechs regelmäßigen Vierecken begrenzt wird, von denen je drei in einem Eck zusammenstoßen.

5) Das reguläre Pentagondodekaeder, von zwölf regelmäßigen Fünfecken umschlossen.

Es können nicht mehr, als fünf regelmäßige Polygone gebildet werden, weil alle in einem Eck zusammenstoßende Linienwinkel zusammengenommen weniger, als 4R betragen müssen. Würde ihre Summe gleich vier Rechten sein, so

lägen sie in einer einzigen Ebene. Ein Winkel im regelmäßigen Dreieck beträgt aber $\frac{2}{3}$R; es kann daher die größte Zahl solcher in einem Eck zusammenstoßenden Winkel nur fünf sein, weil sechs 4R betragen würden. Im regelmäßigen Viereck ist ein Winkel = R, folglich können nicht mehr als drei solche Winkel ein Eck bilden. Im regelmäßigen Fünfeck ist ein Winkel = $1\frac{1}{5}$R, es können daher nicht mehr als drei ein Eck bilden. Wollte man aber versuchen, Polyeder aus regelmäßigen Sechsecken u. s. w. zu bilden, so würden schon drei Winkel dieser Vielecke die Summe von 4R übersteigen.

Ein regelmäßiges Prisma wird ein solches genannt, dessen Grundflächen regelmäßige Vielecke sind, und dessen Seitenkanten auf den Grundkanten senkrecht stehen.

Eine Pyramide heißt regelmäßig, wenn die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, und die von der Spitze auf die Grundfläche gezogene Senkrechte durch die Mitte derselben geht.

Von den ähnlichen Polyedern.

§. 220.

Aehnlich heißen Polyeder, wenn ihre gleich liegenden Seitenflächen ähnliche Figuren, und ihre gleich liegenden Ecke gleich sind. Aehnliche Polyeder verhalten sich, wie die Würfel gleich liegender Seiten, d. h. ist eine Seite des einen Körpers z. B. dreimal so groß, als die gleich liegende Seite des andern, so verhält sich der Körperinhalt des einen Polyeders zum Körperinhalt des andern, wie 27:1.

Es ist also der Körperinhalt des Polyeders, von welchem eine Seite dreimal so groß ist, als die gleich liegende des andern, 27mal so groß, als der Inhalt des andern Polyeders.

Von der Berechnung des Kubikinhalts fester Körper von unregelmäßiger Form.

§. 221.

Den kubischen Inhalt solcher Körper, welche sich nicht als Prismen, Pyramiden u. s. w. berechnen lassen, bestimmt man auf andere Weise, wie durch Einlegen in Wasser. Hat man z. B. einen hölzernen oder blechernen Trog in Gestalt eines rechteckigen Parallelepipedums, 6′ lang, 2′ hoch und eben so breit, so faßt derselbe 24c′ oder 24000c″ Dc. Wasser oder Sand. Will man nun den Kubikinhalt irgend eines Körpers, z. B. einer Statue wissen, und kann diese ganz in den Trog gelegt werden: so bringt man sie hinein, und füllt den Trog, je nachdem der Stoff des Körpers es zuläßt, völlig mit Wasser oder Sand. Darauf wird der Körper mit Vorsicht, daß nicht im mindesten Wasser oder Sand verschüttet werde, wieder aus dem Troge genommen. Mißt man jetzt die Tiefe des leeren Raumes und sucht den Kubikinhalt, so ist derselbe dem Kubikinhalte des eingelegten Körpers gleich. Wäre z. B. die Tiefe des leeren Raumes 8″, so wäre der Inhalt des Körpers, da Länge und Breite unverändert bleibt $= 6.2.{}^{8}/_{10} = 9{,}6c' = 9600c''$.

Mißt man aber die Tiefe des Wassers oder Sandes, und sucht den Kubikinhalt des noch vollen Raumes, so muß dieser von dem ganzen Inhalte des Troges abgezogen werden. Im obigen Beispiele hätte man die Tiefe 1′ 2″ = 12″ Dc. gefunden, und es wären sonach 60.20.12=14400 c″ noch gefüllt; mithin wäre der Inhalt des eingelegten Körpers:

24000—14400=9600c″ Dc., wie oben.

Statt des rechteckigen Parallelepipedums kann man auch einen cylinderförmigen Behälter von bekannter Grundfläche und Tiefe nehmen.

Anhang.

Von der Ellipse.

§. 222.

Wird ein Kegel schräg zu seiner Grundfläche durchschnitten, so heißt die auf seiner Seitenfläche entstehende krumme Linie eine Ellipse. Die längste Gerade AB (Fig. 138), welche in der Ellipse gezogen werden kann, heißt große Axe, und die Gerade CD, welche in der Mitte von AB senkrecht auf ihr steht, wird kleine Axe genannt. Die Ellipse hat die Eigenschaft, daß je zwei Geraden, welche man von zwei bestimmten Punkten F und G der großen Axe an irgend einen Punkt der krummen Linie zieht, zusammengenommen der großen Axe gleich sind, wie

$FE+GE=AB$, oder $FH+GH=AB$ u. s. w. die bestimmten Punkte F und G heißen Brennpunkte. Diese werden gefunden, wenn beide Axen AB und CD senkrecht auf einander gezogen sind, so daß O gemeinschaftlicher Mittelpunkt ist, indem man aus C mit dem Halbmesser OB (d. i. die halbe große Axe) einen Kreisbogen beschreibt.

Die zwei Punkte, worin der Kreisbogen die große Axe schneidet, sind die Brennpunkte der Ellipse.

Wenn die große Axe AB und die beiden Brennpunkte F und G gegeben sind, so wird die kleine Axe gefunden, wenn man in der Mitte O eine Senkrechte errichtet, aus dem einen Brennpunkte F mit der halben großen Axe einen Kreisbogen beschreibt.

Die Punkte C und D, in welchen der Kreisbogen die Senkrechte schneidet, sind die Endpunkte der kleinen Axe.

Soll eine Ellipse, deren beide Axen AB und CD (Fig. 139) gegeben sind, gezeichnet werden, so sucht man zuerst die Brennpunkte F und G, dann beschreibt man aus F, als Mittelpunkte, mit einem beliebigen Theile von AB z. B. AK, als Halbmesser, Kreisbogen über und unter AB; zieht hierauf aus G, als neuem Mittelpunkte, mit dem Reste BK der großen Axe gleichfalls Kreisbogen über und unter AB. Die Durchschnittspunkte L und L' dieser Kreisbogen sind Punkte der Ellipse; denn

$$FL+GL=AB, \text{ eben so } FL'+GL'=AB.$$

Verwechselt man in Bezug auf die Halbmesser die Brennpunkte F und G mit einander, so erhält man zwei neue Punkte, welche ebenfalls der Ellipse angehören. Wiederholt man dieses Verfahren mit immer andern Zirkelöffnungen, so kann man so viel Punkte der Ellipse, als man nur will, finden.

Wenn die Ellipse eine große Ausdehnung hat, so befestigt man in den Brennpunkten F und G die beiden Enden eines Fadens, dessen Länge der großen Axe AB gleich ist. Man spannt nun diesen Faden mittelst eines Stiftes aus, führt dann solchen längs des immer straff angezogenen Fadens herum, so beschreibt auf diese Weise der Stift die Ellipse.

Der Flächeninhalt einer Ellipse wird gefunden, wenn man die halbe große Axe mit der halben kleinen und noch mit π multiplicirt.

Bezeichnet man die Fläche der Ellipse mit E, die halbe große Axe mit a und die halbe kleine Axe mit b, so ist

$$E = a.b.\pi \text{ oder} = a.b.3\tfrac{1}{7}.$$

Hieraus folgt:

$$a = \frac{E}{b.\pi} \text{ und } b = \frac{E}{a.\pi}, \text{ d. h.}$$

theilt man den Flächeninhalt der Ellipse durch das Produkt aus der halben kleinen Axe und π, so erhält man die halbe große Axe; theilt man aber den Inhalt durch das Produkt aus der halben großen Axe und π, so ergiebt sich die halbe kleine Axe.

Die Ausmessung des Körperinhaltes von Cylindern, Kegeln mit elliptischen Grundflächen ist nicht unterschieden von dem Verfahren bei Cylindern, Kegeln überhaupt, indem man statt der Kreise nur die elliptischen Flächen zu berechnen hat.

Beispiele.

1) Wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren große Axe 7′, und deren kleine Axe 4′ 6″ Dd. mißt?

2) Wie lang muß die große Axe einer Ellipse werden, wenn die kleine Axe 3′ und der Flächeninhalt 33□′ betragen soll?

3) Wie lang muß die kleine Axe einer Ellipse gemacht werden, deren große Axe 6′ 5″ Dd. betragen soll, wenn ihr Flächeninhalt einem Kreise, der mit einem 2′ 9″ Dd. großen Halbmesser beschrieben ist, gleich kommt?

4) Wie viel Schenkeimer faßt ein elliptischer Cylinder, der 4′ tief ist, und dessen Grundfläche 5′ lang und 3′ breit ist?

5) Wie tief muß ein cylindrischer Wasserbehälter mit elliptischer Grundfläche, die 3½′ lang und 2¼′ breit ist, werden, wenn derselbe 22 Schenkeimer fassen soll?

6) Eine 4′ tiefe Weinkufe, in Gestalt eines abgekürzten Kegels mit elliptischen Grundflächen, ist am Boden 5′ lang und 3′ breit, oben aber 3′ lang und 2′ breit; welchen Kubikinhalt hat die Kufe, und wie viel Schenkeimer faßt sie?

Inhalt.

Einleitung	§§. 1 — 12.
Vom Kreise	§§. 13 — 32.
Von den Winkeln	§§. 33 — 44.
Eintheilung und Congruenz der Dreiecke	§§. 45 — 55.
Abhängigkeit der Seiten von den Winkeln und umgekehrt der Winkel von den Seiten im Dreiecke	§§. 56 — 61.
Von der senkrechten Linie	§§. 62 — 69.
Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke	§. 70.
Vom gleichschenkligen Dreiecke	§§. 71 — 74.
Von den Parallellinien	§§. 75 — 82.
Von der Summe der Winkel in geradlinigen Figuren	§§. 83 — 93.
Von den Peripherie- und Mittelpunktwinkeln	§§. 94 — 99.
Von den Parallelogrammen	§§. 100 — 109.
Von der Tangente	§§. 110 — 119.
Von den Figuren im Kreise und um den Kreis	§§. 120 — 134.
Von den gleich großen Figuren	§§. 135 — 142.
Vom Pythagoräischen Lehrsatze und dessen Anwendung	§§. 143 — 148.
Von der Ausmessung oder Berechnung des Flächeninhaltes ebener Figuren	§§. 149 — 162.
Von den Proportional-Linien	§§. 163 — 175.
Von der Aehnlichkeit der Figuren	§§. 176 — 210.
Von der Eintheilung der Körper	§. 211.
Von der Körpermessung	§. 212.
Vom Prisma	§. 213.

Vom Cylinder . . . . §. 214.
Von der Pyramide . . . . §. 215.
Vom Kegel . . . . §. 216.
Von der abgekürzten Pyramide und dem abgekürzten Kegel . . . . §. 217.
Von der Kugel . . . . §. 218.
Von den regelmäßigen eckigen Körpern . . . . §. 219.
Von den ähnlichen Polyedern . . . . §. 220.
Von der Berechnung des Kubikinhaltes fester Körper von unregelmäßiger Form . . . . §. 221.
Von der Ellipse . . . . §. 222.

Berichtigungen.

Seite 1, Zeile 12 und 17, ferner S. 3, Z. 1 lies statt Sonn- und Feiertags-Gewerbsschule — Sonn- und Feiertags-Handwerksschule.
„ 7, „ 2, 3 v. u. l. statt gerade, krumme, gebrochene und gemischte — gerade und krumme.
„ 35, „ 12, l. statt §. 29 — §. 2.
„ 36, „ 1 v. u. l. statt ziehen — errichten.
„ 39, „ 9 v. u. l. statt √DBC — △DCB
„ 51, „ 1 v. u. l. statt hackens — hakens.
„ 81, „ 15 l. statt dem halben Produkte — dem Produkte.

Staatliche Bibliothek Bamberg

Tafel I.

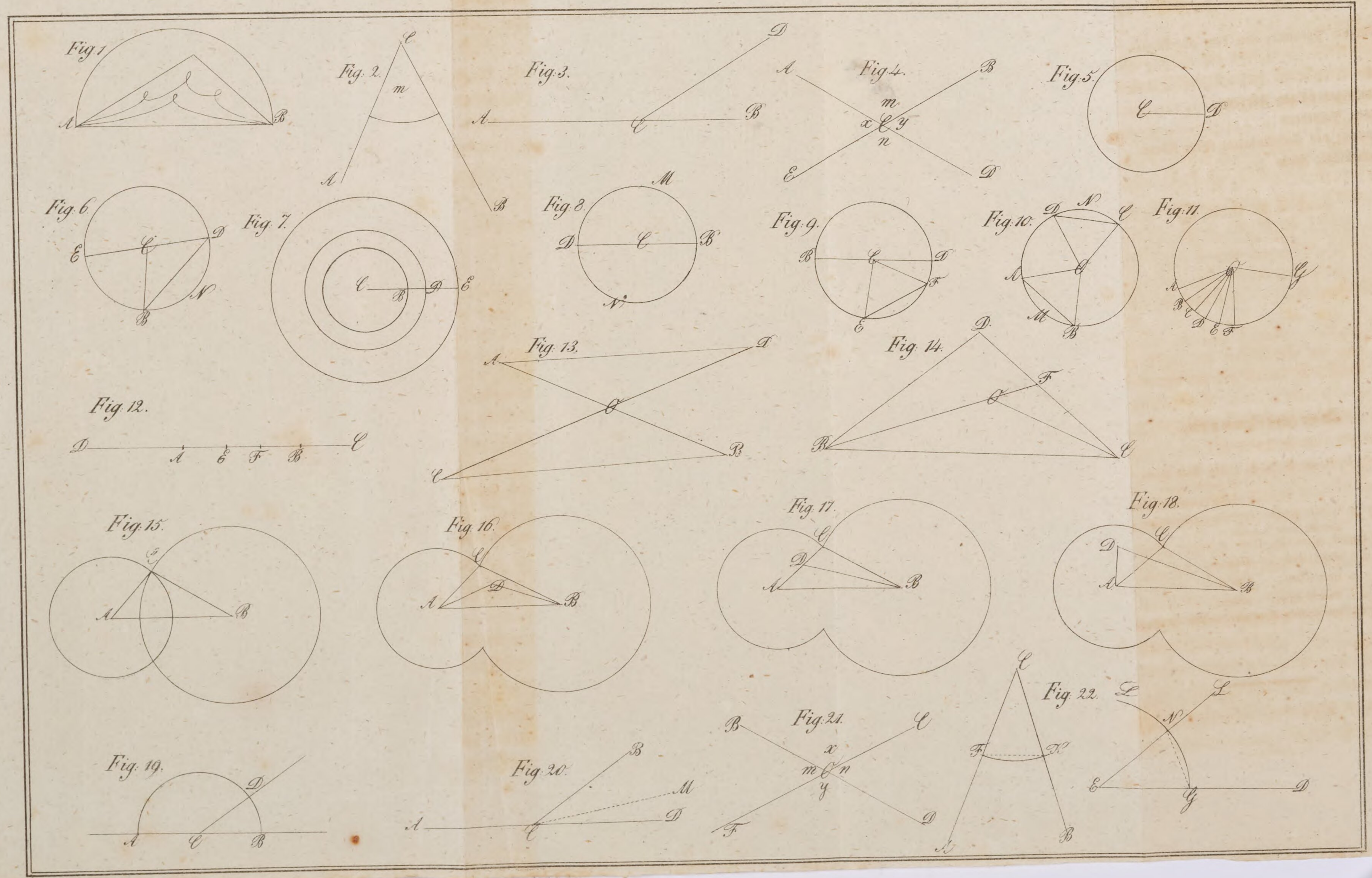


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.

Tafel II.

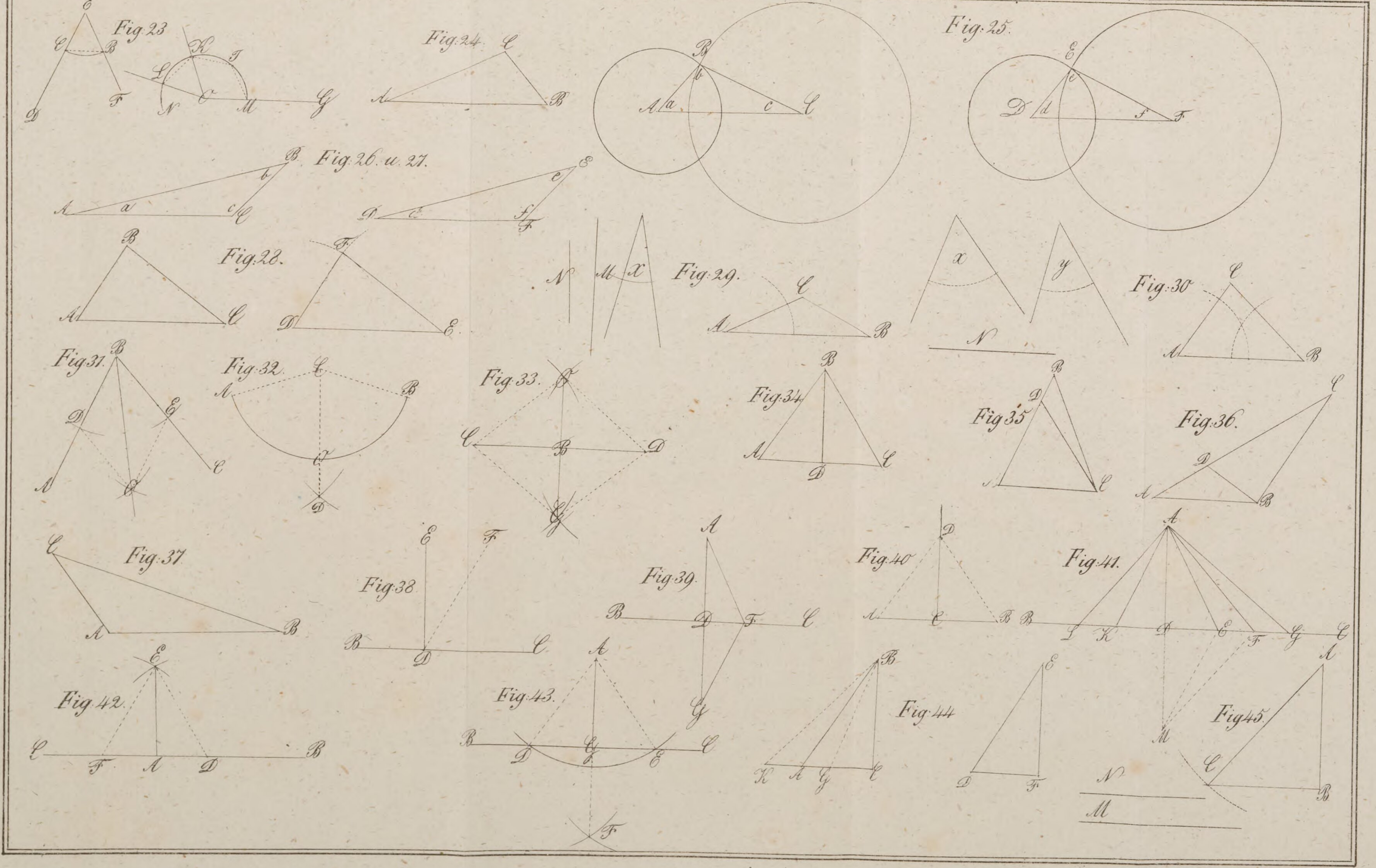


Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25.
Fig. 26. u. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35
Fig. 36.
Fig. 37
Fig. 38
Fig. 39.
Fig. 40
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44
Fig. 45

Tafel III.

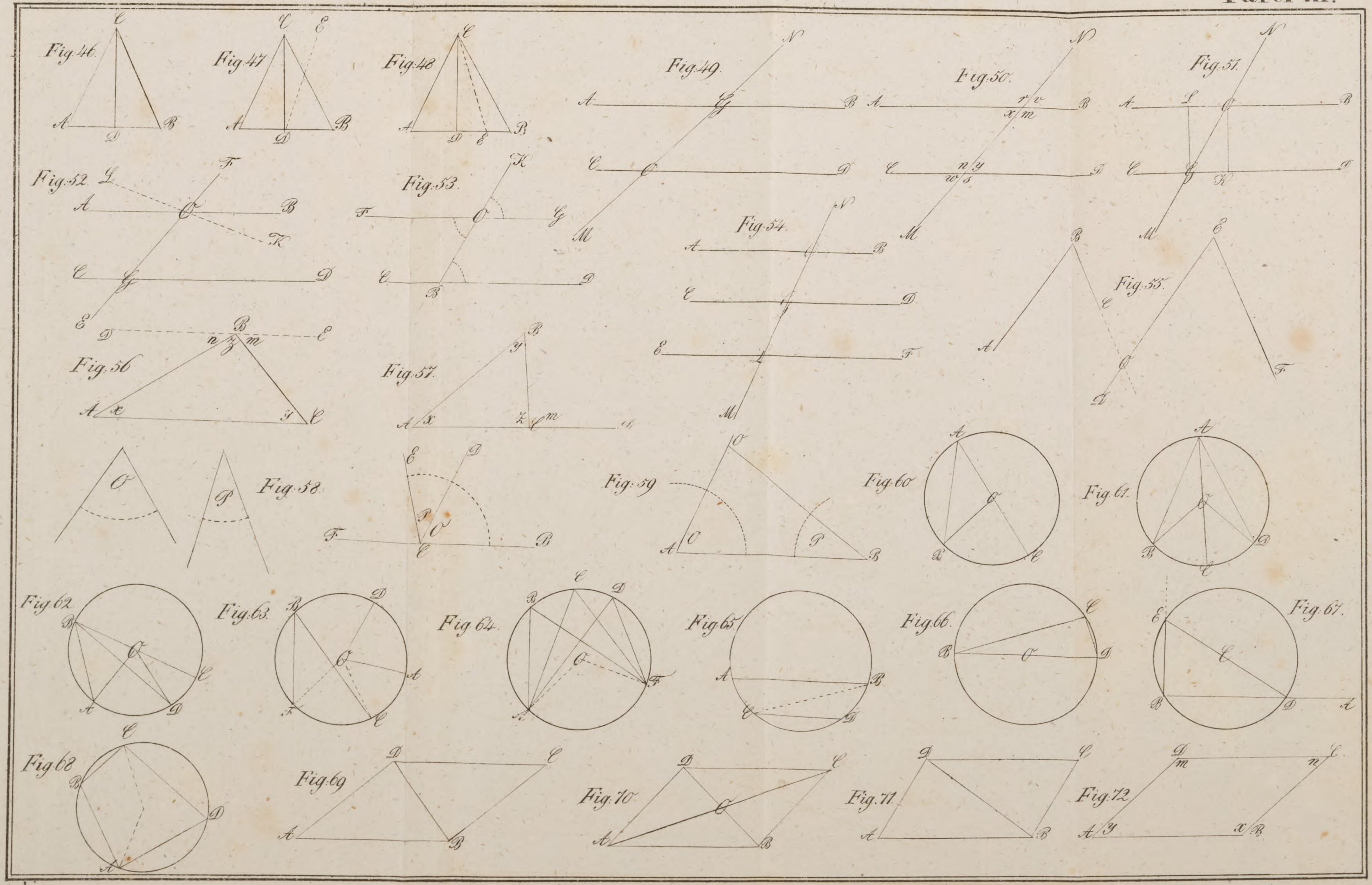


Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.

Tafel IV.

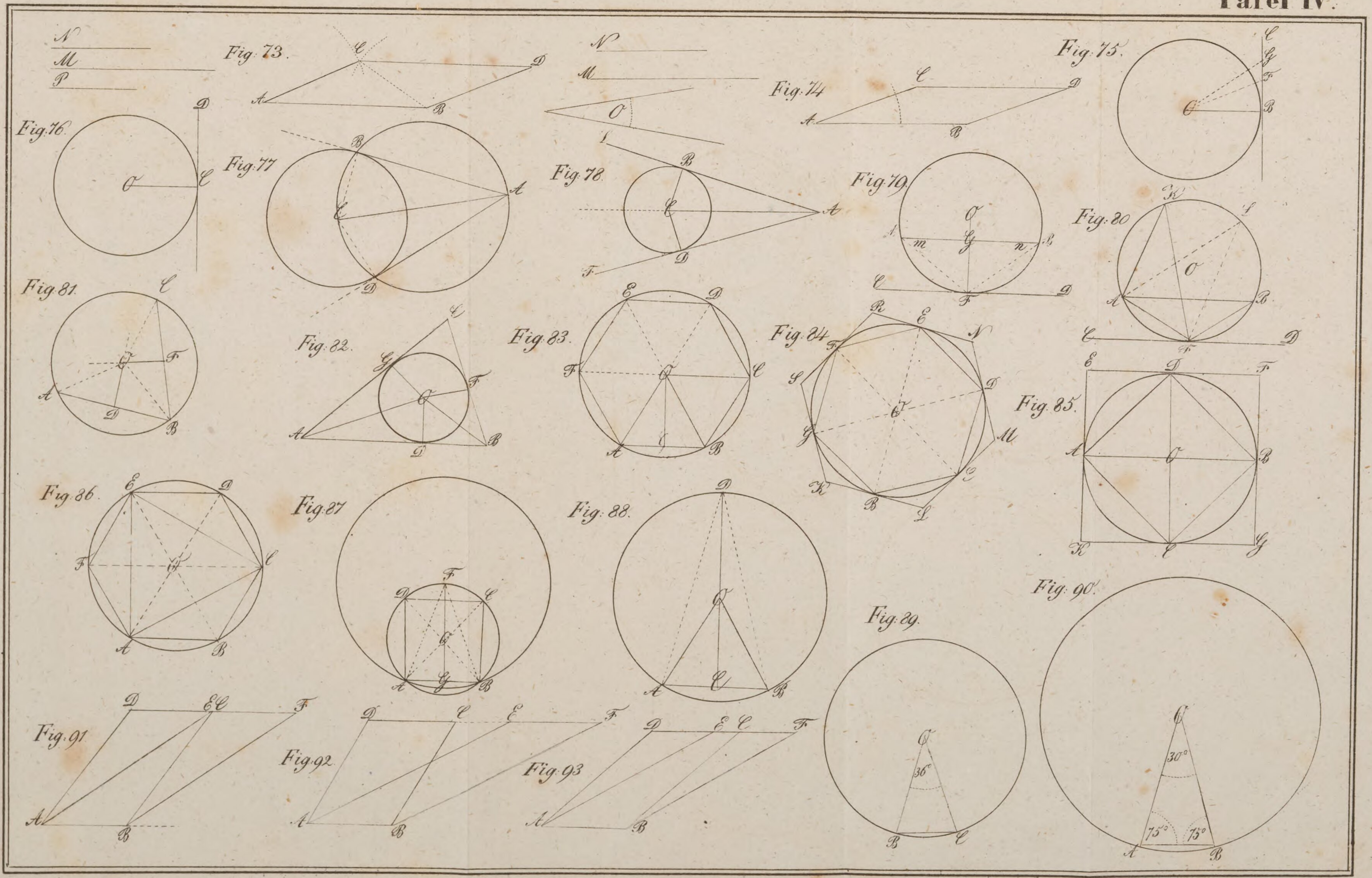


Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
36°
30°
75°
75°

Tafel V

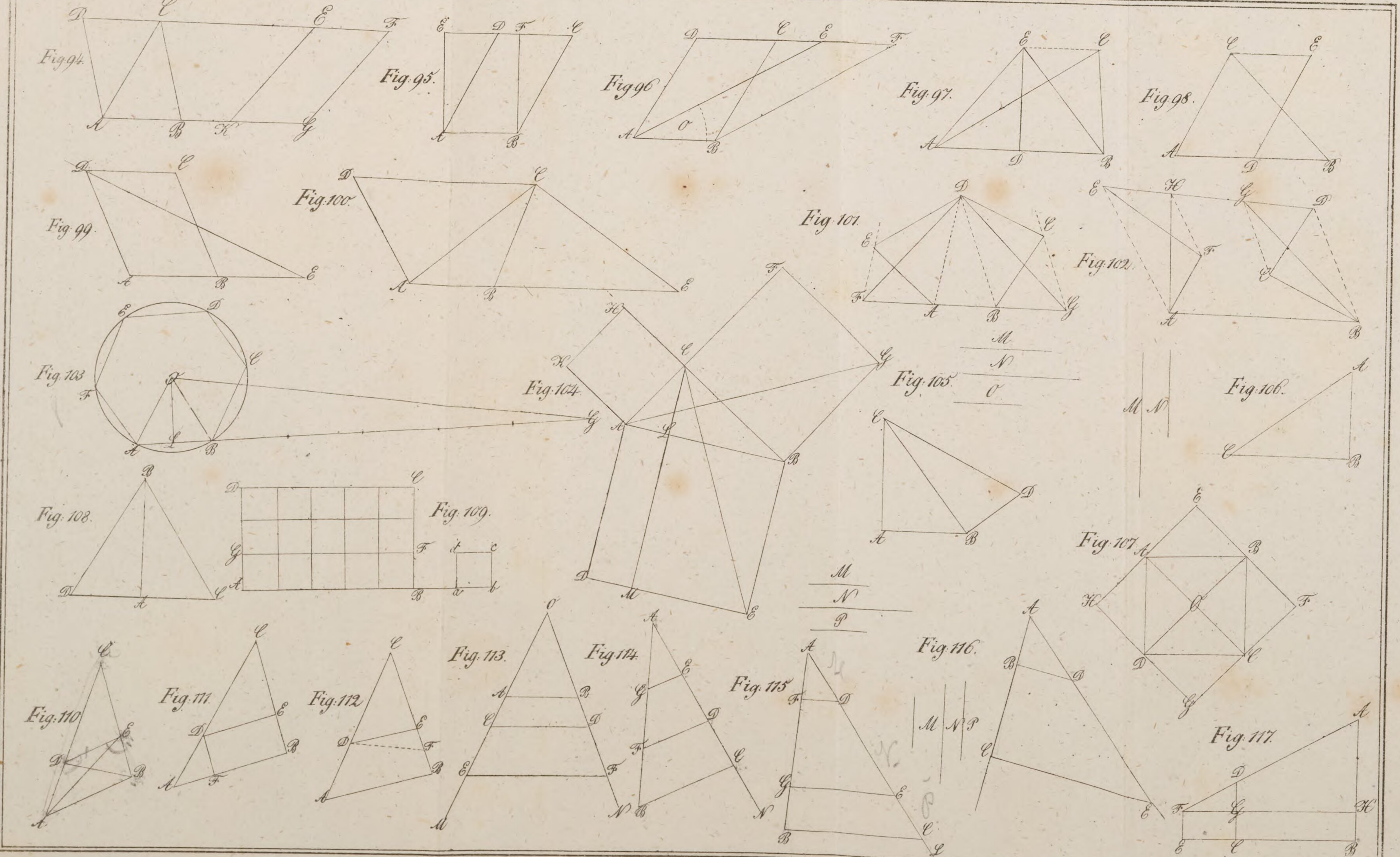


Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.

Tafel VI.

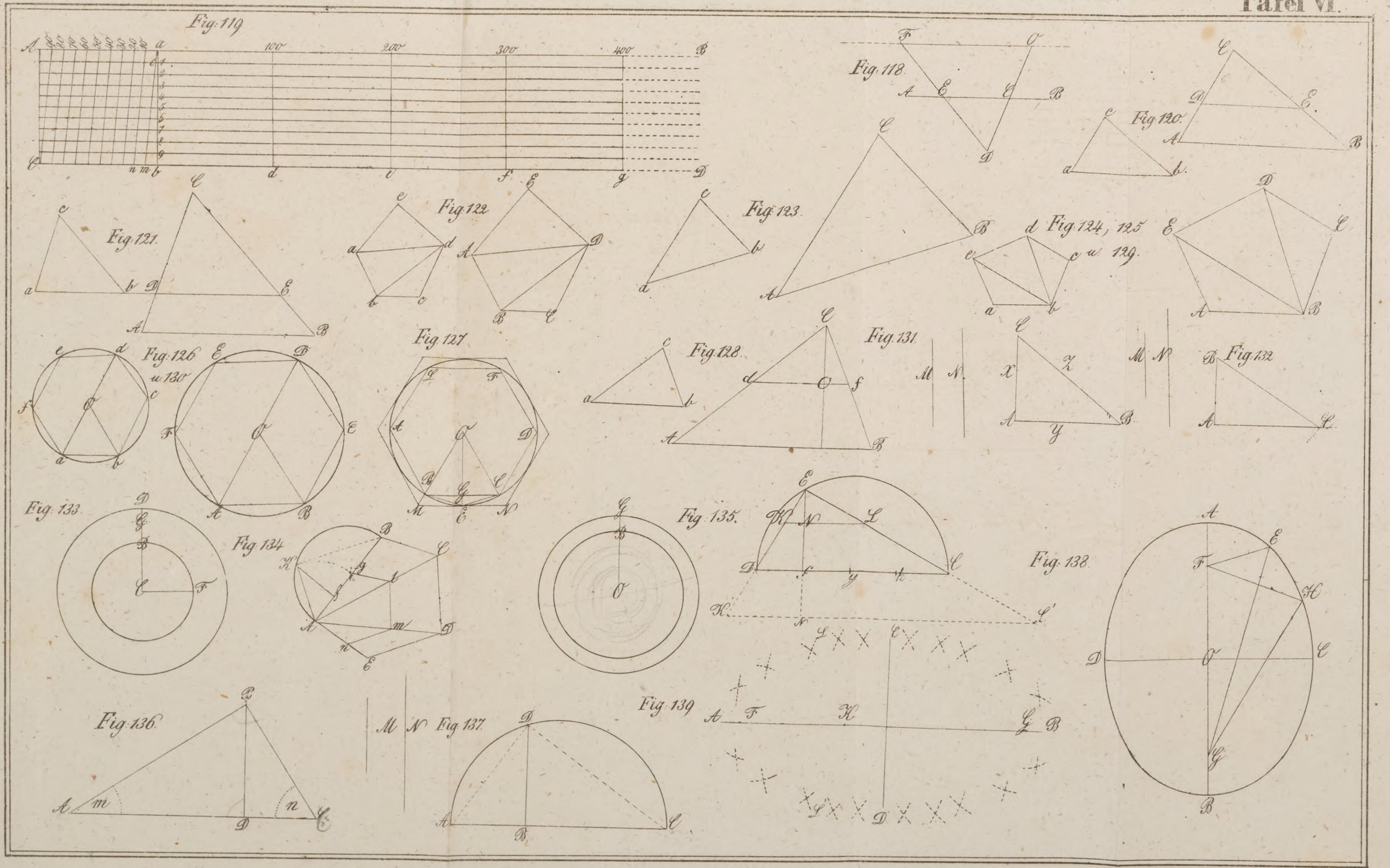


Fig. 119
100
200
300
400
Fig. 118
Fig. 120
Fig. 121
Fig. 122
Fig. 123
Fig. 124, 125 u. 129
Fig. 126 u. 130
Fig. 127
Fig. 128
Fig. 131
Fig. 132
Fig. 133
Fig. 134
Fig. 135
Fig. 136
Fig. 137
Fig. 138
Fig. 139

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Mayring, Valentin

Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Berechnung der wichtigsten geometrischen Körper und ihrer Oberflächen

Würzburg 1842

Bamberg, Staatsbibliothek -- AGB P 17
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11421412-4